

HƯỚNG DẪN HỌC TẬP **HOÀN THIÊN** KIẾN THỨC HÌNH HỌC



EVERYTHING YOU NEED TO ACE GEOMETRY IN ONE BIG FAT NOTEBOOK

SỔ TAY HÌNH HỌC

Christy Needham

Vũ Hương dịch

↳ Những ghi chú đến từ học sinh thông minh nhất lớp
(Đã được kiểm tra kỹ lưỡng bởi những giáo viên **TÀI NĂNG**)



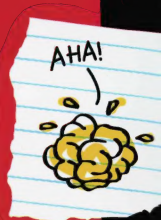
From the
BRAINS
and
BRAIN
QUEST!



Hàng triệu cuốn **SỔ TAY** đã được bán ra!

HÌNH HỌC? CHUYỆN NHỎ!

SỔ TAY HÌNH HỌC bao gồm tất cả các kiến thức Trung học phổ thông bạn cần



Cuốn Sổ tay chia nhỏ các chủ đề phức tạp thành các chủ đề dễ tiếp cận, cùng những ví dụ minh họa sinh động giúp ghi nhớ kiến thức dễ dàng hơn. Hình học trở nên thú vị hơn bao giờ hết

Bao gồm

- Logic và Lý luận • Những đường thẳng song song
- Tam giác và Định lý • Tỷ lệ • Định lý Pytago
- Các kiến thức cơ bản về đường tròn • Diện tích
- Thể tích hình lăng trụ • Và nhiều kiến thức khác nữa

HỌC TỐT CÙNG VỚI

Sơ đồ ghi nhớ

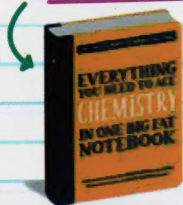
Định nghĩa

Ví dụ minh họa

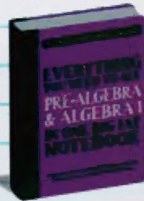
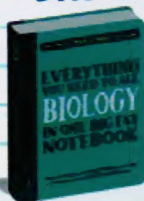
Bài tập tóm tắt kiến thức

ĐỂ ĐẠT ĐƯỢC ĐIỂM SỐ CAO HƠN!

LÀM CHỦ HÓA HỌC CÙNG VỚI



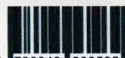
SẮP XUẤT BẢN



Achaabooks
BOOKS & STEM

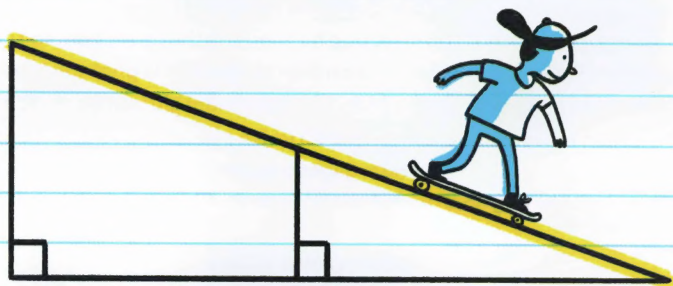
SỔ TAY HÌNH HỌC

ISBN: 978-604-320-358-5



9 786043 203585
Giá 459.000đ

SỔ TAY HÌNH HỌC



ALL RIGHTS RESERVED

Vietnam edition copyright © A Chau International Education Development and Investment Corporation, 2021.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the prior permission of the publishers.

ISBN: 978-604-320-358-5

Printed in Viet Nam

Bản quyền tiếng Việt thuộc về

Công ty Cổ phần Đầu tư và Phát triển Giáo dục Quốc tế Á Châu, xuất bản theo hợp đồng chuyển nhượng bản quyền với Workman Publishing Co., Inc 2020.

Bản quyền tác phẩm đã được bảo hộ, mọi hình thức xuất bản, sao chụp, phân phối dưới dạng in ấn, văn bản điện tử, đặc biệt là phát tán trên mạng internet mà không được sự cho phép của đơn vị nắm giữ bản quyền là hành vi vi phạm bản quyền và làm tổn hại tới lợi ích của tác giả và đơn vị đang nắm giữ bản quyền.

Không ủng hộ những hành vi vi phạm bản quyền. Chỉ mua bán bản in hợp pháp.

ĐƠN VỊ PHÁT HÀNH:

Công ty Cổ Phần Đầu Tư và Phát Triển Giáo Dục Quốc Tế Á Châu

Số 8, lô 2 Dự án nhà ở Phùng Khoang, Phường Trung Văn, Quận Nam Từ Liêm,
Thành phố Hà Nội

Điện thoại: 024 8582 5555

Hotline hỗ trợ: Tại Hà Nội: 09166 40166

Tại Hồ Chí Minh: 0961 940 199

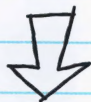
Website: <http://achaubooks.vn>

<http://hocgioitoan.com.vn>

Email: info@achaubooks.vn

Facebook: [Fb.com/hocgioitoan.com.vn](https://www.facebook.com/hocgioitoan.com.vn)

HƯỚNG DẪN HỌC TẬP **HOÀN THIỆN** KIẾN THỨC HÌNH HỌC



EVERYTHING YOU NEED TO ACE
GEOMETRY IN ONE BIG FAT
NOTEBOOK

SỔ TAY HÌNH HỌC

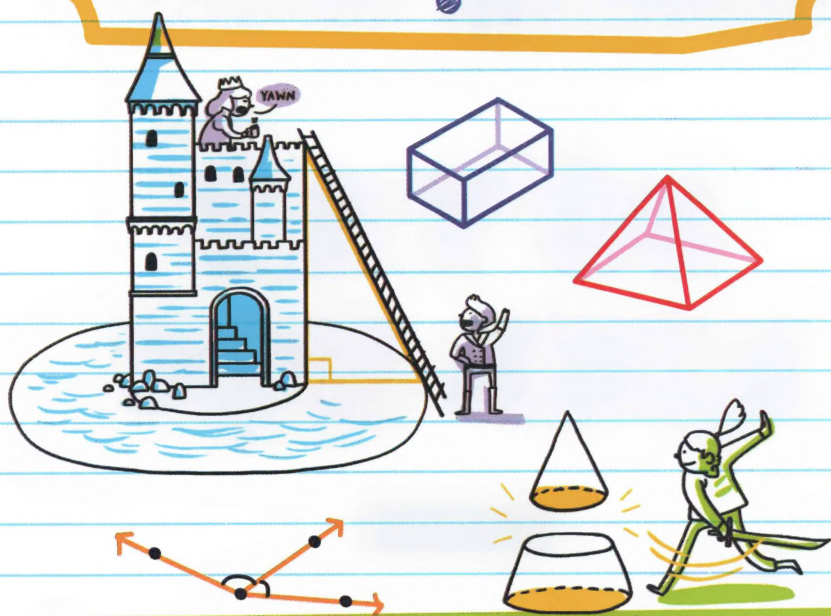
Christy Needham

Vũ Hương dịch

↳ Những ghi chú đến từ học sinh thông minh nhất lớp
(Đã được kiểm tra kỹ lưỡng bởi những giáo viên **TÀI NĂNG**)

MỌI THỨ BẠN CẦN BIẾT ĐỂ LÀM CHỦ

HÌNH HỌC



Cuốn sổ tay được thiết kế nhằm hỗ trợ các em trong giờ học hình học. Hãy coi đây chỉ là vở ghi chép của một bạn giỏi môn hình học nhất trong lớp em. Có vẻ như bạn đó là người "hiếu" được mọi bài giảng và có thể viết lại kiến thức chính xác, rõ ràng, dễ hiểu.

Qua các chương của cuốn sách, các em sẽ nhận thấy những khái niệm quan trọng đều được diễn tả theo cách dễ tiếp cận và có liên quan chặt chẽ với nhau. Hình học phẳng và hình học không gian, các bài toán về quan hệ bằng nhau, các phép chứng minh, các phép biến hình và hình học tọa độ, tất cả đều được trình bày sao cho dễ hiểu. Đó là hình học dành cho những học sinh từ trung bình đến khá giỏi.

Cuốn sách trình bày các ghi chú theo cấu trúc cố định như sau:

- Các khái niệm quan trọng được tô **MÀU VÀNG**.
- Các khái niệm đều được định nghĩa rõ ràng.
- Các định nghĩa và khái niệm có liên quan được in **MÀU XANH**.
- Các ví dụ và các phép tính được trình bày chi tiết theo từng bước và có thêm giải thích, minh họa hoặc sơ đồ kèm theo.

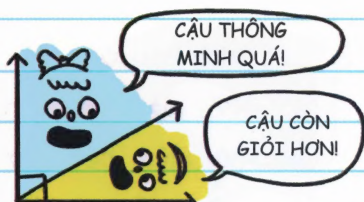
Nếu em muốn có một cuốn sách tham khảo thú vị, dễ hiểu đồng hành cùng sách vở của mình, và nếu em không kịp ghi chép các kiến thức trong lớp học, cuốn sổ tay này chính là thứ em cần. Cuốn sách có đủ các kiến thức chủ chốt mà các em sẽ học trong môn hình học.

MỤC LỤC

BÀI 1:

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN ³1

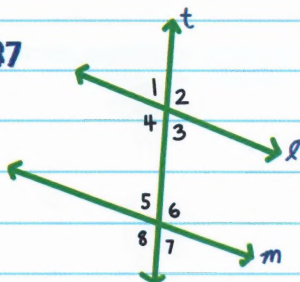
1. Điểm, đường thẳng và mặt phẳng **2**
2. Góc **17**
3. Cặp góc **27**
4. Dạng hình **41**
5. Logic và suy luận toán học **53**
6. Các phép chứng minh trong hình học **69**



BÀI 2:

ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG ³87

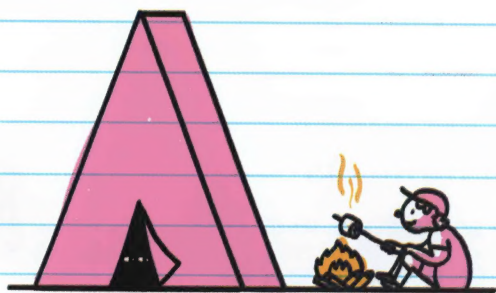
7. Đường thẳng song song và cắt tuyến **88**
8. Chứng minh các cặp góc đặc biệt **99**
9. Chứng minh các đường thẳng song song **109**



BÀI 3:

TAM GIÁC VÀ TAM GIÁC BẰNG NHAU 119

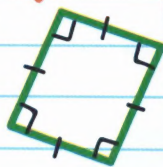
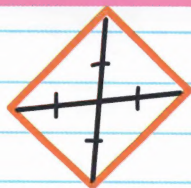
10. Các loại tam giác trong hình học 120
11. Góc trong và góc ngoài của tam giác 129
12. Trường hợp bằng nhau Cạnh - Cạnh - Cạnh và Cạnh - Góc - Cạnh 139
13. Trường hợp bằng nhau Góc - Cạnh - Góc và Góc - Góc - Cạnh 153
14. Các đường trong tam giác 163
15. Bất đẳng thức tam giác 177



BÀI 4:

TỨ GIÁC VÀ ĐA GIÁC 185

16. Hình bình hành 186
17. Hình thoi, hình chữ nhật và hình vuông 197
18. Hình thang và hình điều 209
19. Số đo của góc trong đa giác 219

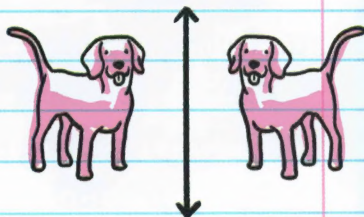


BÀI 5:

CÁC PHÉP BIẾN HÌNH 229

- 20. Phép đối xứng trục 230
- 21. Phép tịnh tiến 243
- 22. Phép quay 251
- 23. Tích các phép biến hình 265
- 24. Hình bằng nhau 279

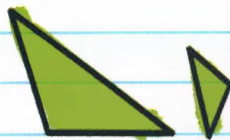
PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC



BÀI 6:

ĐỒNG DẠNG 285

- 25. Tỷ số và tỷ lệ thức 286
- 26. Phép đồng dạng 295
- 27. Hình đồng dạng 310
- 28. Tam giác đồng dạng 319
- 29. Tỷ lệ thức trong tam giác 329



BÀI 7:

TAM GIÁC VUÔNG VÀ LƯỢNG GIÁC 339

30. Hệ số góc và biểu thức tuyến tính 340

31. Định lý Pytago 355

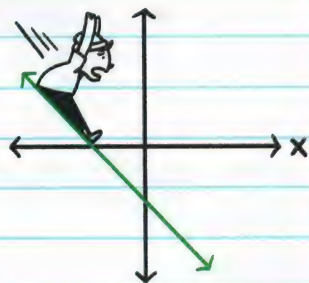
32. Các công thức về trung điểm
và khoảng cách 363

33. Chứng minh tam giác bằng
phương pháp tọa độ 373

34. Chứng minh tứ giác bằng
phương pháp tọa độ 386

35. Tỷ số lượng giác 400

36. Công thức lượng giác 409



BÀI 8:

ĐƯỜNG TRÒN 417

37. Kiến thức cơ bản về đường tròn 418

38. Góc ở tâm và cung tròn 430

39. Radian 442

40. Cung và dây cung 447

41. Góc nội tiếp 455

42. Tiếp tuyến 463

43. Cát tuyến 471

44. Công thức tính độ dài đường tròn, cung tròn 477



BÀI 9:

DIỆN TÍCH 489

45. Diện tích hình bình hành và tam giác 490

46. Diện tích của các hình đa giác khác 499

47. Diện tích của hình tròn và hình quạt 511

48. Diện tích của hình tổng hợp 519



BÀI 10:

DIỆN TÍCH XUNG QUANH, DIỆN TÍCH TOÀN PHẦN VÀ THỂ TÍCH 531

49. Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình lăng trụ và hình trụ 532

50. Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình chóp và hình nón 545

51. Thể tích của hình lăng trụ và hình trụ 557

52. Thể tích của hình chóp và hình nón 569

53. Diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu 579

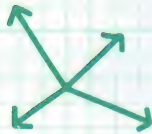
54. Thể tích của hình tổng hợp 589

55. Khối tròn xoay 599

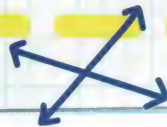


TUYỆT HẢO!
CHÚNG TA BẮT
ĐẦU THỜI NÀO!

BÀI 1



Các Khái Niệm
Cơ Bản


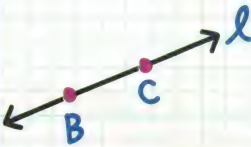


Chương 1

ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

Hình học là một phân nhánh của toán học nghiên cứu về hình dạng, đường thẳng, góc, khoảng cách và mối quan hệ giữa chúng. Một ví dụ về hình học là phép tính các góc của một tứ giác

Đây là một số khái niệm chính và các tên gọi cơ bản thường dùng trong hình học:

TÊN GỌI VÀ ĐỊNH NGHĨA	KÝ HIỆU	VÍ DỤ
ĐIỂM: chỉ ra một vị trí	Tên của điểm. Ví dụ: A	
ĐƯỜNG THẲNG: một con đường thẳng kéo dài mãi về cả hai phía	Một mũi tên hai đầu nằm ngang phía trên hai điểm nằm trên đường thẳng. \overleftrightarrow{BC} , \overleftrightarrow{CB} , hoặc l	

TÊN GỌI VÀ ĐỊNH NGHĨA

KÝ HIỆU

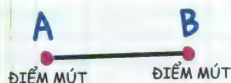
VÍ DỤ

ĐOẠN THẲNG: một phần của đường thẳng bị giới hạn bởi hai đầu mút

Một thanh nằm ngang phía trên hai điểm mút.

\overline{AB} hoặc \overline{BA}

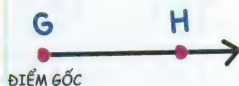
Độ dài: AB



TIA: một phần của đường thẳng xuất phát từ một điểm và kéo dài mãi về một phía

Một mũi tên nằm ngang chỉ về một phía.

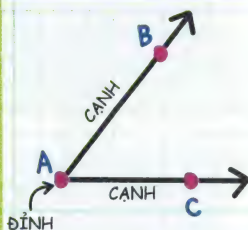
\overrightarrow{GH}



ĐỈNH: giao điểm của hai hay nhiều đoạn thẳng, tia hay đường thẳng

Tên của góc tạo nên đỉnh.

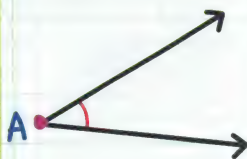
A



GÓC: phần nằm giữa hai tia có chung một điểm gốc (đỉnh)

$\angle A$, $\angle BAC$,

hoặc $\angle CAB$



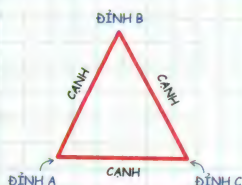
TÊN GỌI VÀ ĐỊNH NGHĨA

KÝ HIỆU

VÍ DỤ

TAM GIÁC: hình có ba cạnh và ba đỉnh

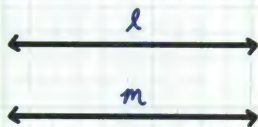
$\triangle ABC$ (hoặc thứ tự các chữ cái **A**, **B**, và **C** sau ký hiệu \triangle có thể thay đổi bất kỳ)



ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG: các đường thẳng luôn cách nhau một khoảng không đổi. Chúng **KHÔNG** **BAO GIỜ** gặp nhau.

viết là:

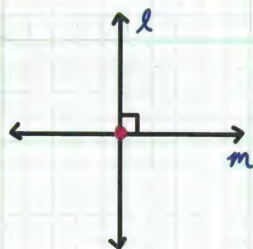
$l \parallel m$



ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC: hai đường thẳng cắt nhau tạo thành bốn góc vuông

viết là:

$l \perp m$



ĐƯỜNG THẲNG

Một **ĐƯỜNG THẲNG** được hiểu là một đường dài, thẳng tuyệt đối, không có bề dày và kéo dài mãi về hai phía. Đường thẳng có **MỘT CHIỀU**, nó là hình phẳng.

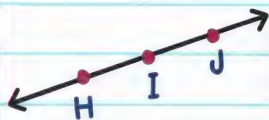
Ta đặt tên một đường thẳng bằng cách liệt kê:

1. hai điểm bất kỳ nằm trên đường thẳng có mũi tên hai đầu ở phía trên; hoặc
2. sử dụng chữ cái viết thường, viết nghiêng cạnh mũi tên (nếu có)

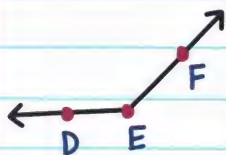


Đường thẳng này có thể gọi tên là: \overleftrightarrow{FG} , \overleftrightarrow{GF} , \overleftrightarrow{GH} , \overleftrightarrow{HG} , \overleftrightarrow{FH} , \overleftrightarrow{HF} , hoặc k .

Điểm **THẲNG HÀNG (CỘNG TUYẾN)** nằm trên cùng một đường thẳng.
chung đường thẳng



Các điểm H, I, và J **thẳng hàng**.



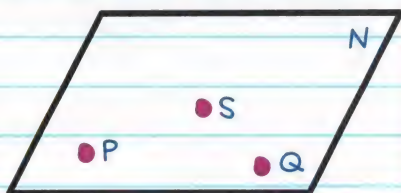
Các điểm D, E, và F **không thẳng hàng**.
(Các điểm không nằm trên cùng một đường thẳng. Đường thẳng phải thẳng tắp). Đây là hai tia.

MẶT PHẪNG

Hình học về mặt phẳng nghiên cứu các hình dạng "phẳng" như hình vuông và tam giác. Các hình phẳng có **HAI CHIỀU**, hay gọi là hình 2-D.

Một **MẶT PHẪNG** là một bề mặt phẳng (hai chiều) kéo dài mãi về mọi phía.

Để đặt tên một mặt phẳng,



1. sử dụng chữ cái in hoa trên mặt phẳng; hoặc

2. ba điểm bất kỳ trên mặt phẳng (theo thứ tự bất kỳ)

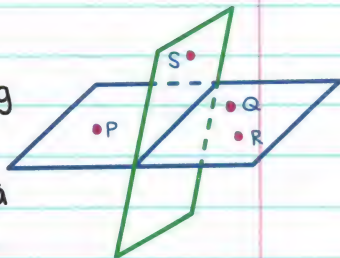
miễn là các điểm đó không tạo thành một đường thẳng

Mặt phẳng này có thể gọi tên là **PSQ**, **PQS**, **SPQ**, **SQP**, **QPS**, **QSP**, hoặc mặt phẳng **N** (chữ cái in hoa không có ký hiệu điểm)

Điểm **ĐỒNG PHẪNG** nằm trên cùng một mặt phẳng.

chung mặt phẳng

Các điểm **P**, **Q**, và **R** đồng phẳng. Chúng đều nằm trên mặt phẳng nằm ngang. Điểm **S** không đồng phẳng với **P**, **Q**, và **R**, vì nó nằm trên một mặt phẳng khác (mặt phẳng thẳng đứng)



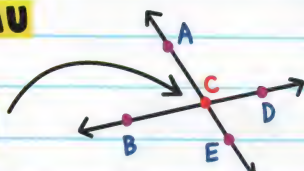
PHẦN GIAO NHAU CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

GIAO NHAU

để đi qua hoặc
nằm ngang qua nhau

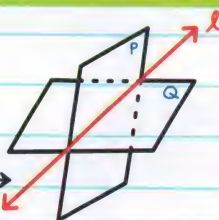
Hai đường thẳng **GIAO NHAU**
tại một điểm.

phần giao nhau: điểm C



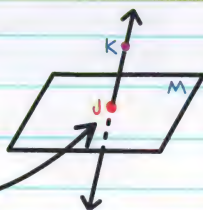
Hai mặt phẳng giao nhau tại một
đường thẳng.

phần giao nhau: đường thẳng l



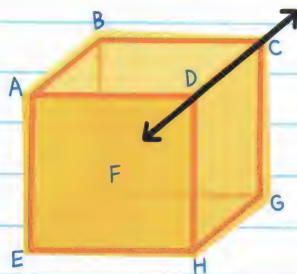
Một mặt phẳng và một đường
thẳng giao nhau tại một điểm.

phần giao nhau: điểm J



Khối lập phương biểu diễn sáu
mặt phẳng.

Phần giao nhau của mặt phẳng
 ABD và mặt phẳng DHG là \overrightarrow{DC} .



TIÊN ĐỀ VÀ ĐỊNH LÝ

Các phép chứng minh được sử dụng để truyền đạt những tư tưởng trong toán học. Đó là những lập luận logic được dùng để xác nhận một ý tưởng nào đó. Khi chứng minh người ta thường sử dụng các tiên đề và định lý.

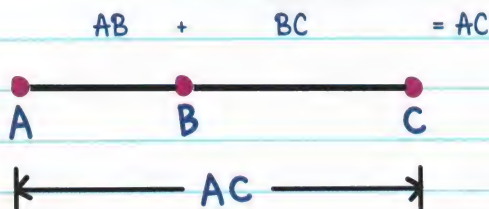
TIÊN ĐỀ trong toán học là một mệnh đề được coi như luôn đúng mà không cần chứng minh. **ĐỊNH LÝ** là một mệnh đề đã được chứng minh bằng những lý thuyết, định nghĩa hoặc các tiên đề khác.

TIÊN ĐỀ ĐOẠN THẲNG

Không phải tất cả các tiên đề đều có tên.

TIÊN ĐỀ CỘNG ĐOẠN THẲNG

Nếu B là một điểm nằm trên đoạn thẳng \overline{AC} , thì $AB + BC = AC$.



Cộng độ dài của các đoạn thẳng thành phần để tìm độ dài của đoạn thẳng tổng.

Chú ý:

Thanh ngang trong ký hiệu có sự khác biệt!

có thanh ngang

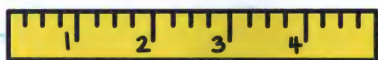
\overline{AB}

tên của đoạn thẳng

không có thanh ngang

AB

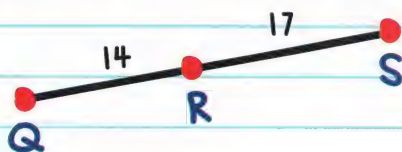
độ dài của đoạn thẳng



Độ dài của \overline{AB} là:

$AB = 5 \text{ inch.}$

VÍ DỤ: Biết điểm R nằm giữa hai điểm Q và S, $QR = 14$, và $RS = 17$, Hãy tìm độ dài đoạn thẳng QS.

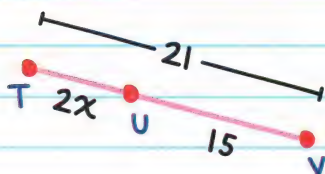


$$QS = QR + RS$$

$$QS = 14 + 17 = 31$$



VÍ DỤ: Biết điểm U nằm giữa hai điểm T và V , $TU = 2x$, $UV = 15$, $TV = 21$. Hãy tìm giá trị của x .



VÌ $2x$ CỘNG 15 BẰNG 21 NÊN TA CÓ MỘT PHƯƠNG TRÌNH.



$$TU + UV = TV$$

$$2x + 15 = 21$$

$$2x + 15 - 15 = 21 - 15$$

$$2x = 6$$

Thay thế.

Trừ cả hai vế cho 15.

$$\frac{2x}{2} = \frac{6}{2}$$

Chia cả hai vế cho 2.

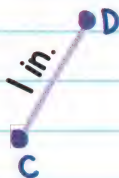
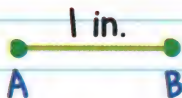
$$x = 3$$

Đoạn thẳng bằng nhau

Hai đoạn thẳng

BẰNG NHAU

nếu chúng có cùng độ dài.



\overline{AB} bằng với \overline{CD} .

Sử dụng một **MỆNH ĐỀ TƯƠNG ĐƯƠNG** để biểu diễn các đoạn thẳng bằng nhau:

$$\overline{AB} = \overline{CD}$$

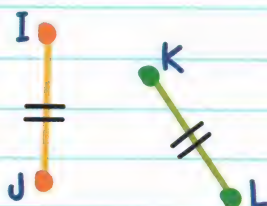
là ký hiệu
bằng nhau

$\overline{AB} = \overline{CD}$ đọc là "đoạn thẳng
 AB bằng đoạn thẳng CD "

Ta thường sử dụng **DẤU GẠCH** (|) để đánh dấu các đoạn thẳng bằng nhau. Những đoạn thẳng có số dấu gạch giống nhau nghĩa là các đoạn thẳng bằng nhau.



$$\overline{EF} = \overline{GH}$$

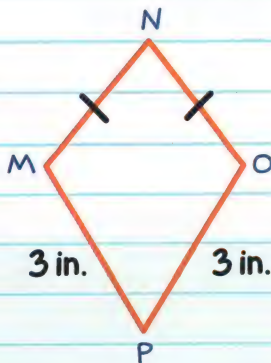


$$\overline{IJ} = \overline{KL}$$

VÍ DỤ: Trong hình vẽ sau đây những đoạn thẳng nào bằng nhau?

Hình vẽ đã cho gồm bốn đoạn thẳng: \overline{MN} , \overline{NO} , \overline{OP} , và \overline{PM} .

Các dấu gạch trên \overline{MN} và \overline{NO} chứng tỏ chúng bằng nhau

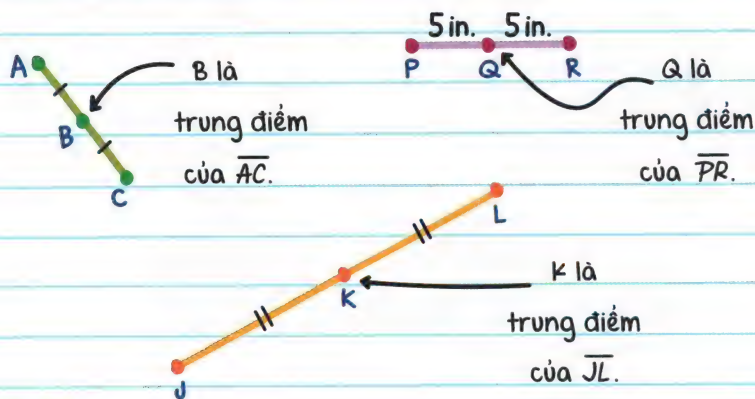


Độ dài \overline{MP} bằng với độ dài \overline{PO} , nên \overline{MP} bằng với \overline{PO} .

Như vậy ta có, $\overline{MN} = \overline{NO}$ và $\overline{MP} = \overline{PO}$.

CHIA ĐOẠI ĐOẠN THẲNG

TRUNG ĐIỂM của một đoạn thẳng là điểm nằm giữa đoạn thẳng đó; nó chia đoạn thẳng đó thành hai đoạn thẳng bằng nhau.



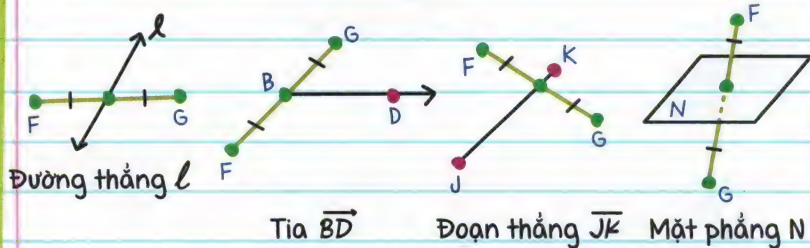
CHIA ĐÔI ĐOẠN THẲNG

nghĩa là có một đường thẳng, tia, đoạn thẳng hay một mặt phẳng đi qua một đoạn thẳng tại trung điểm của đoạn thẳng đó (chia đôi nó ra).

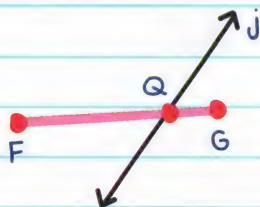
Chia đôi có nghĩa là "chia thành hai phần bằng nhau". Độ dài của mỗi đoạn thẳng thành phần bằng một nửa độ dài đoạn thẳng ban đầu.



Ví dụ về chia đôi đoạn thẳng \overline{FG} :



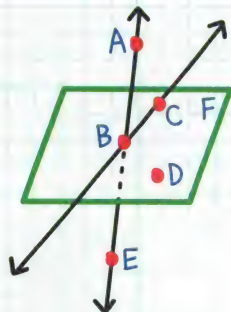
Đường thẳng j không chia đôi đoạn thẳng \overline{FG} vì nó không cắt đôi \overline{FG} tại trung điểm của đoạn thẳng





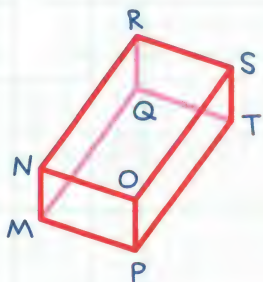
BÀI TẬP

Quan sát hình vẽ sau đây và trả lời các câu hỏi từ 1 - 4



1. Đọc tên ba điểm thẳng hàng.
2. Đọc tên ba điểm đồng phẳng.
3. Chỉ ra phần giao cắt giữa đường thẳng \overleftrightarrow{AE} và mặt phẳng F.
4. Mặt phẳng F có sáu tên gọi khác là gì?

Quan sát hình vẽ sau đây rồi trả lời các câu hỏi 5 và 6



5. Trong hình vẽ đã cho biểu diễn bao nhiêu mặt phẳng?
6. Phần giao cắt giữa mặt phẳng MPT và mặt phẳng MNR là gì?
7. Tiên đề Cộng đoạn thẳng được phát biểu như thế nào?

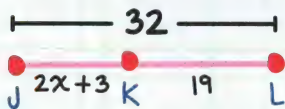


BÀI TẬP

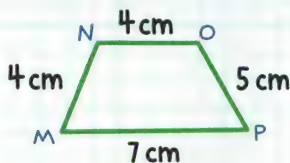
8. Tìm độ dài của đoạn thẳng \overline{GI} .



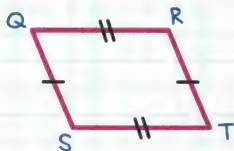
9. Tìm giá trị của x .



10. Viết một đẳng thức về các đoạn thẳng bằng nhau trong hình vẽ dưới đây.



11. Viết các đẳng thức về các đoạn thẳng bằng nhau trong hình vẽ dưới đây.



12. Thế nào gọi là chia đôi đoạn thẳng?

LỜI GIẢI



1. A, B, và E
2. B, C, và D
3. Điểm B
4. Các mặt phẳng BCD, BDC, CDB, CBD, DBC, DCB
5. Sáu
6. Đường thẳng \overleftrightarrow{MA}
7. Nếu điểm B nằm giữa A và C, thì ta có $AB + BC = AC$.
8. $GI = 57$
9. $JL = JK + KL$; $32 = 2x + 3 + 19$; $32 = 2x + 22$; $2x = 10$; $x = 5$
10. $\overline{MN} = \overline{NO}$
11. $\overline{QS} = \overline{RT}$ và $\overline{QR} = \overline{ST}$
12. Chia đôi đoạn thẳng là một đường thẳng, tia, đoạn thẳng hay một mặt phẳng đi qua một đoạn thẳng tại trung điểm của đoạn thẳng đó.

Chương 2

GÓC

Một **GÓC** (ký hiệu là \angle) là phần nằm giữa hai TIA có chung ĐỈNH GỐC.

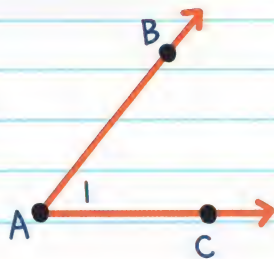


Đặt tên cho góc theo ba cách:

1. đỉnh: $\angle A$

2. ba điểm, trong đó đỉnh là điểm ở giữa: $\angle BAC$ hoặc $\angle CAB$

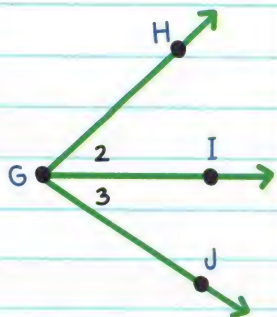
3. số viết trong góc: $\angle 1$



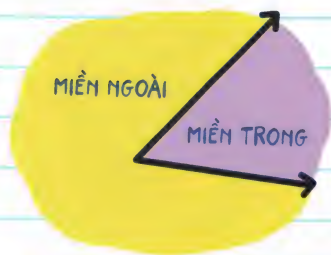
Nếu từ hai góc trở lên có chung điểm gốc, ta không thể gọi tên các góc bằng đỉnh.

Hình vẽ ở bên biểu diễn ba góc:

$\angle HGJ$, $\angle 2$, và $\angle 3$. Mỗi góc đều có đỉnh là G . Do vậy ta KHÔNG sử dụng $\angle G$ để gọi tên bất kỳ góc nào bởi vì gọi như vậy sẽ không chỉ rõ được góc mà ta đang muốn nhắc tới.



Khoảng không quanh một góc có thể chia thành miền trong và miền ngoài.



SỐ ĐO CỦA GÓC

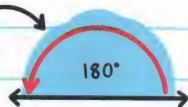
SỐ ĐO của $\angle A$ (độ lớn của góc) được ký hiệu là $m\angle A$.

Ta sử dụng đơn vị ĐỘ ($^\circ$) để đo độ lớn của một góc.

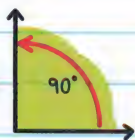
Toàn bộ một vòng tròn có độ lớn 360° .

Các góc cơ bản:

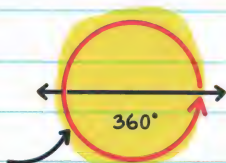
Góc 180° là góc quay một nửa đường tròn. Hai cạnh của góc tạo thành một đường thẳng.



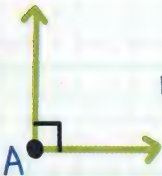
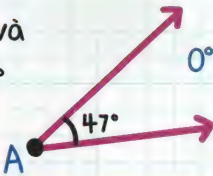

Góc 90° là góc quay một phần tư đường tròn. Góc này còn được gọi là góc vuông.



Góc 360° là góc quay toàn bộ đường tròn.



CÁC LOẠI GÓC

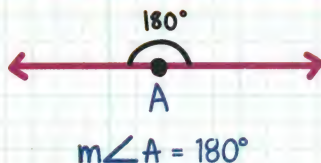
GÓC	ĐỊNH NGHĨA VÀ VÍ DỤ
GÓC VUÔNG	<p>Số đo bằng đúng 90°</p>  <p>$m\angle A = 90^\circ$</p>
GÓC NHỎ	<p>Số đo lớn hơn 0° và nhỏ hơn 90°</p>  <p>$0^\circ < m\angle A < 90^\circ$</p>
GÓC TÙ	<p>Số đo lớn hơn 90° và nhỏ hơn 180°</p>  <p>$90^\circ < m\angle A < 180^\circ$</p>

GÓC

ĐỊNH NGHĨA VÀ VÍ DỤ

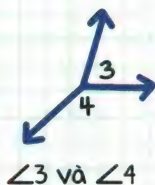
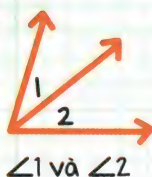
GÓC BẸT

Số đo bằng
đúng 180°



GÓC KỀ

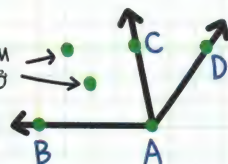
Các góc nằm trên cùng một mặt phẳng, có chung đỉnh, có một cạnh chung và không có chung điểm nào ở miền trong.



MIỀN TRONG CỦA
 $\angle BAC$ VÀ $\angle BAD$
 \equiv



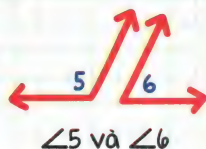
CÁC ĐIỂM
CHUNG Ở
MIỀN
TRONG



GÓC KHÔNG KỀ

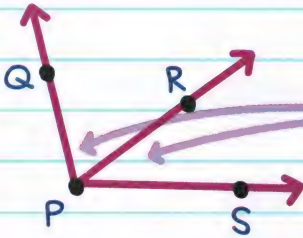
Các góc không có chung đỉnh hoặc không có cạnh chung.

$\angle 5$ và $\angle 6$ không có chung đỉnh, cũng không có cạnh chung



TIỀN ĐỂ CỘNG GÓC

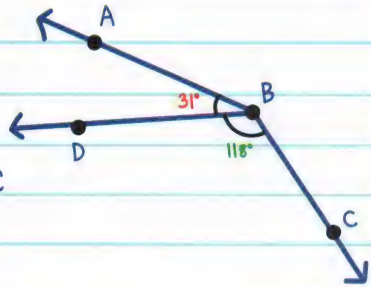
Nếu điểm R thuộc miền trong của góc $\angle QPS$,
thì $m\angle QPR + m\angle RPS = m\angle QPS$.



Cộng số đo của các góc thành phần lại ta được số đo của góc lớn.

VÍ DỤ: Tìm $m\angle ABC$.

$$m\angle ABD + m\angle DBC = m\angle ABC$$



$$31^\circ + 118^\circ = m\angle ABC$$

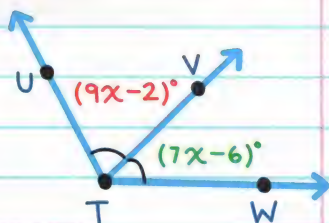
$$m\angle ABC = 149^\circ$$

Thay thế.

Thực hiện phép cộng.

VÍ DỤ: $m\angle UTW = 120^\circ$. Tìm giá trị của x

$$m\angle UTV + m\angle VTW = m\angle UTW$$



$$(9x - 2)^\circ + (7x - 6)^\circ = 120^\circ$$

Thay thế.

$$16x - 8 = 120$$

Rút gọn.

$$16x - 8 + 8 = 120 + 8$$

Cộng cả hai vế với 8.

$$16x = 128$$

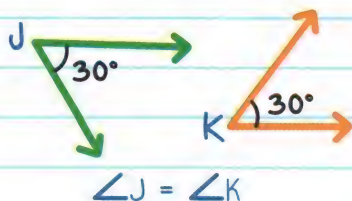
$$\frac{16x}{16} = \frac{128}{16}$$

Chia cả hai vế cho 16.

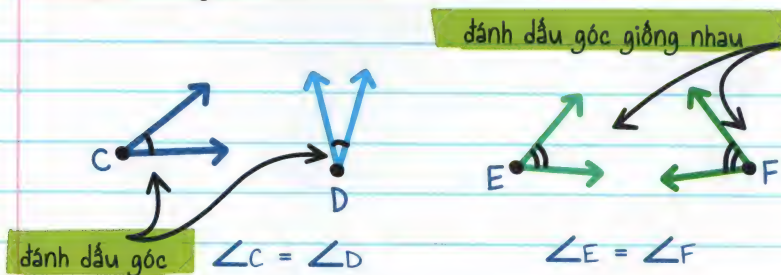
$$x = 8$$

GÓC BẰNG NHAU

Hai góc **BẰNG NHAU**
nếu số đo của chúng
bằng nhau.

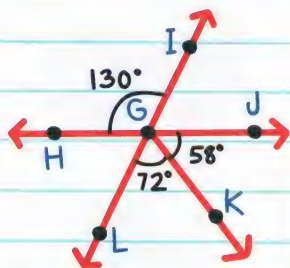


Chú ý: Chúng ta có thể đánh dấu giống nhau để biểu diễn các góc bằng nhau.



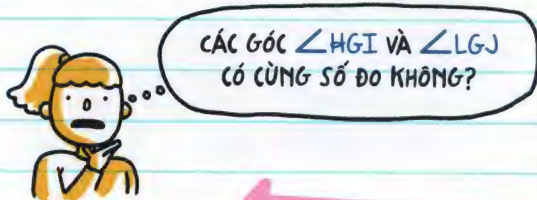
VÍ DỤ: Hai góc $\angle HGI$ và $\angle LGJ$ có bằng nhau không?

$$\begin{aligned} m\angle LGJ &= 72^\circ + 58^\circ \\ &= 130^\circ \end{aligned}$$



Vì $\angle HGI$ và $\angle LGJ$ đều có số đo là 130° , nên chúng bằng nhau.

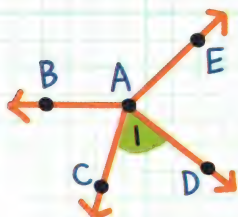
$$\angle HGI = \angle LGJ$$





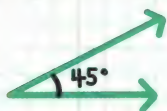
BÀI TẬP

1. Hãy viết ba tên gọi của góc được tô đậm trong hình sau:



Từ câu 2 - 5 hãy chỉ rõ các góc cho trước là góc vuông, góc nhọn, góc tù hay góc bẹt.

2.



3.



4.



5.

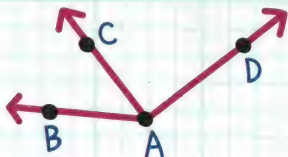




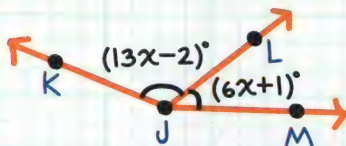
BÀI TẬP

6. Hãy viết tiếp mệnh đề sau:

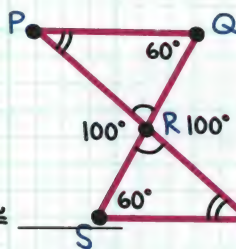
$$m\angle BAC + m\angle CAD = m \text{ _____}.$$



7. Biết $m\angle KJM = 170^\circ$, Hãy tìm giá trị của x .

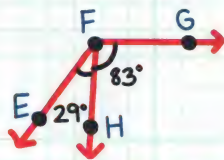
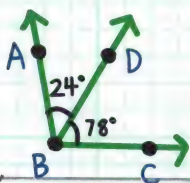


Với câu 8 và 9, hãy sử dụng hình vẽ sau đây.



8. $\angle RPQ \cong$ _____ 9. $\angle PRS \cong$ _____

10. Hãy viết tên các cặp góc bằng nhau trong hình vẽ dưới đây.



LỜI GIẢI



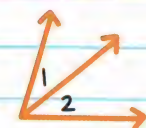
1. $\angle 1$, $\angle CAD$, hoặc $\angle DAC$
2. nhọn
3. vuông
4. bẹt
5. tù
6. $\angle BAD$
7. $m\angle KJM = m\angle KJL + m\angle LJM$; $170 = (13x - 2) + (6x + 1)$;
 $170 = 19x - 1$; $171 = 19x$; $x = 9$
8. $\angle RTS$ (hoặc $\angle STR$)
9. $\angle QRT$ (hoặc $\angle TRQ$)
10. $\angle I = \angle EFG$

Chương 3

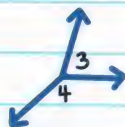
CẶP GÓC

Hai góc có thể liên quan đến nhau về số đo hoặc về hướng. Các góc như vậy gọi là **CẶP GÓC**. Có nhiều mối quan hệ giữa một cặp góc.

GÓC KÊ nằm trên cùng một mặt phẳng, có chung đỉnh, có chung một cạnh và không có chung điểm thuộc miền trong.

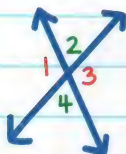


$\angle 1$ và $\angle 2$
kề nhau



$\angle 3$ và $\angle 4$
kề nhau

GÓC ĐỐI là các góc không kề nhau mà đối đỉnh với nhau. Hai đường thẳng cắt nhau tạo thành các góc đối. Góc đối có chung đỉnh.



$\angle 1$ và $\angle 3$
đối nhau

$\angle 2$ và $\angle 4$
đối nhau



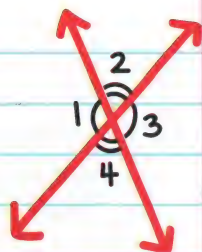
$\angle 5$ và $\angle 7$ và
 $\angle 6$ và $\angle 8$
không đối nhau

Hai đường này không tạo thành đường thẳng. Đây không phải phần giao nhau giữa hai đường thẳng.

Các góc đối nhau thì bằng nhau.

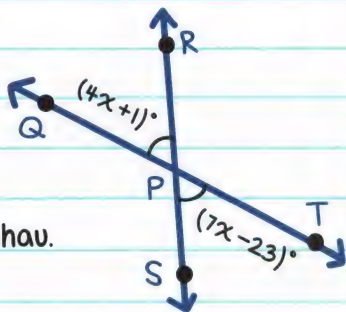
$$\angle 1 = \angle 3$$

$$\angle 2 = \angle 4$$



VÍ DỤ: Tìm giá trị của x .

Vì $\angle QPR$ và $\angle SPT$ là các góc đối nhau nên chúng bằng nhau.



$$m\angle QPR = m\angle SPT$$

$$4x + 1 = 7x - 23$$

$$\cancel{4x} + 1 - \cancel{4x} = 7x - 23 - 4x$$

Thay thế.

Trừ cả hai vế cho $4x$.

$$1 = 3x - 23$$

$$1 + 23 = 3x - \cancel{23} + \cancel{23}$$

Cộng cả hai vế với 23.

$$24 = 3x$$

$$\frac{24}{3} = \frac{\cancel{3x}}{\cancel{3}}$$

Chia cả hai vế cho 3.

$$x = 8$$

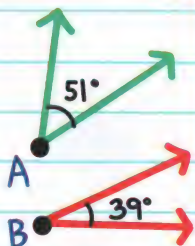
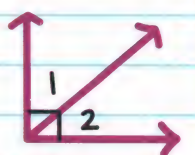
BÀI TẬP

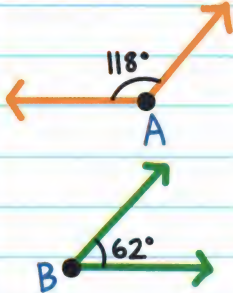
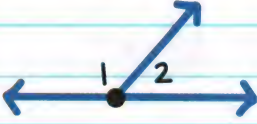
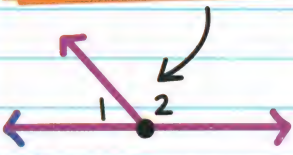
Số đo các góc $\angle QPR$ và $\angle SPT$ có bằng nhau không?

$$m\angle QPR = (4x + 1)^\circ = [4 \times 8 + 1]^\circ = 33^\circ$$

$$m\angle SPT = (7x - 23)^\circ = [7 \times 8 - 23]^\circ = 33^\circ \checkmark$$

Các cặp góc khác:

CẶP GÓC	ĐỊNH NGHĨA	VÍ DỤ
GÓC PHỤ	Hai góc có tổng số đo bằng 90°	 <p>$\angle A$ là góc phụ của $\angle B$.</p>  <p>$\angle 1$ là góc phụ của $\angle 2$.</p>

CẶP GÓC	ĐỊNH NGHĨA	VÍ DỤ
GÓC BÙ	Hai góc có tổng số đo bằng 180°	 <p>$\angle A$ là góc bù của $\angle B$.</p>  <p>$\angle 1$ là góc bù của $\angle 2$.</p>
GÓC KỀ BÙ	Hai góc <u>kề nhau</u> và bù nhau	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;">các góc tạo thành một đường thẳng, 180°</div>  <p>$\angle 1$ và $\angle 2$ là cặp góc kề bù</p>

các góc
phụ nhau



VÍ DỤ: Biết $\angle B$ là góc bù của $\angle A$ và $m\angle A = 42^\circ$,
Hãy tìm $m\angle B$.

Vì $\angle B$ bù với $\angle A$, nên số đo của chúng cộng lại bằng 180° . Ta có:

$$m\angle B + m\angle A = 180^\circ$$

$$m\angle B + 42^\circ = 180^\circ$$

$$m\angle B + 42^\circ - 42^\circ = 180^\circ - 42^\circ$$

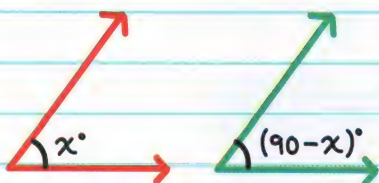
$$m\angle B = 138^\circ$$

VÍ DỤ: Hai góc phụ nhau có số đo hơn kém nhau 16° .
Hãy tìm số đo của hai góc đó.

Phần 1:

Ta chưa biết số đo của góc nào, vậy ta ký hiệu số đo của một góc là biến x° .

Vì hai góc phụ nhau, nên góc kia có số đo là $(90 - x)^\circ$.



Trừ 90 cho x ta được
số đo của góc kia.

Hai góc hơn kém nhau 16° , nên ta có:

Phần 2:

$$(90 - x) - (x) = 16$$

$$90 - 2x = 16$$

Rút gọn.

$$\cancel{90} - 2x - \cancel{90} = 16 - 90$$

Trừ cả hai vế cho 90.

$$-2x = -74$$

$$\frac{\cancel{-2}x}{\cancel{-2}} = \frac{-74}{-2}$$

Chia cả hai vế cho -2.

$$x = 37$$

Góc thứ nhất có số đo bằng 37° .

Góc thứ hai có số đo là: $(90 - x)^\circ = (90 - 37)^\circ = 53^\circ$

Vậy số đo của hai góc cần tìm là 37° và 53° .

THỬ LẠI

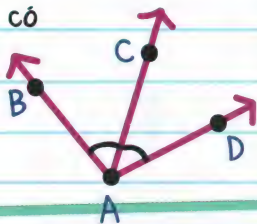
→ Các góc phụ nhau: $37^\circ + 53^\circ = 90^\circ$ ✓

→ Các góc có số đo hơn kém nhau 16° : $53^\circ - 37^\circ = 16^\circ$ ✓

PHÂN GIÁC CỦA GÓC

PHÂN GIÁC CỦA GÓC là một tia chia góc đó thành hai góc bằng nhau.

Nếu \overrightarrow{AC} là phân giác của $\angle BAD$, thì ta có $\angle BAC = \angle CAD$.



Nếu \overrightarrow{QS} chia đôi $\angle PQR$ và $m\angle PQR = 42^\circ$, thì ta có $m\angle PQS = 21^\circ$ và $m\angle SQR = 21^\circ$.

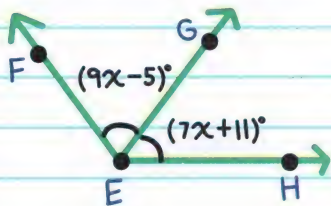


VÍ DỤ:

Cho \overrightarrow{EG} là phân giác của $\angle FEH$,

$m\angle FEG = (9x - 5)^\circ$, và $m\angle GEH = (7x + 11)^\circ$. Hãy tìm số đo $m\angle FEH$.

Đầu tiên, ta tìm giá trị của x .



Vì \overrightarrow{EG} chia $\angle FEH$ thành hai góc

bằng nhau nên số đo của chúng bằng nhau. Ta có:

$$m\angle FEG = m\angle GEH$$

$$9x - 5 = 7x + 11$$

Thay thế.

$$9x - 5 - 7x = 7x + 11 - 7x$$

Trừ cả hai vế cho $7x$.

$$2x - 5 = 11$$

$$2x - 5 + 5 = 11 + 5$$

Cộng cả hai vế với 5.

$$2x = 16$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{16}{2}$$

Chia cả hai vế cho 2.

$$x = 8$$

$$\text{Vậy ta có: } m\angle FEG = (9x - 5)^\circ = (9 \times 8 - 5)^\circ = 67^\circ$$

$$m\angle GEH = (7x + 11)^\circ = (7 \times 8 + 11)^\circ = 67^\circ$$

Từ đó ta tìm $m\angle FEH$:

$$m\angle FEH = m\angle FEG + m\angle GEH$$

$$= 67^\circ + 67^\circ$$

$$= 134^\circ$$

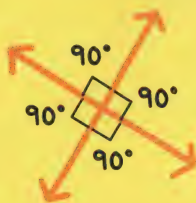
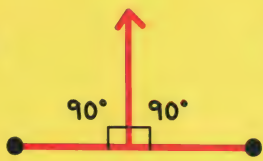
Tiền đề cộng góc

Thay thế..



TRUNG TRỰC

là đường, tia hay đoạn thẳng tạo thành các góc vuông (90°).

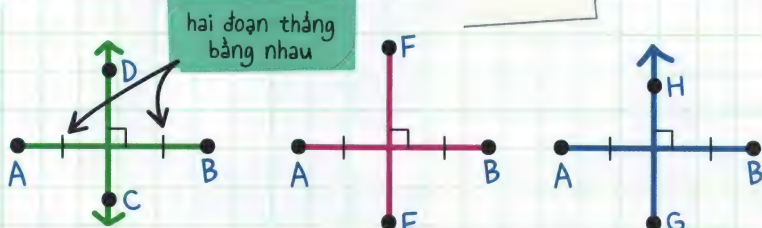


ĐƯỜNG TRUNG TRỰC của một đoạn thẳng là một đường thẳng, tia hay đoạn thẳng khác chia một đoạn thẳng đã cho thành hai đoạn bằng nhau và tạo thành bốn góc vuông với đoạn thẳng đó.

CHIA ĐÔI ĐOẠN THẲNG VÀ
TẠO THÀNH GÓC VUÔNG CHÍNH
LÀ ĐƯỜNG TRUNG TRỰC



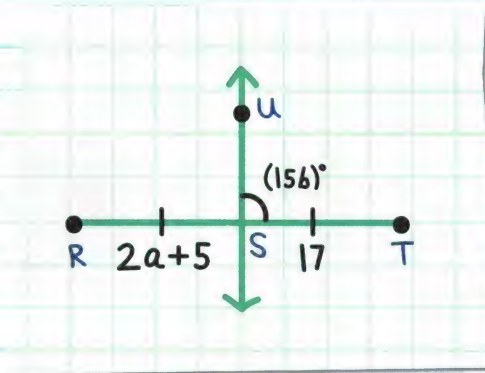
VÍ DỤ:



\overleftrightarrow{CD} , \overleftrightarrow{EF} , và \overleftrightarrow{GH} là các đường trung trực của \overline{AB} .

VÍ DỤ: Trong hình vẽ sau đây, $RS = 2a + 5$, $ST = 17$, và $m\angle UST = (15b)^\circ$. Hãy tìm các giá trị a và b sao cho \overleftrightarrow{US} là đường trung trực của \overline{RT} .

Để \overleftrightarrow{US} là đường trung trực thì các đoạn, \overline{RS} và \overline{ST} phải bằng nhau. Ta có:



$$RS = ST$$

Các đoạn thẳng bằng nhau
có độ dài bằng nhau.

$$2a + 5 = 17$$

Thay thế.

$$2a + \cancel{5} - \cancel{5} = 17 - 5$$

Trừ cả hai vế cho 5.

$$2a = 12$$

$$\frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}} = \frac{12}{2}$$

Chia cả hai vế cho 2.

$$a = 6$$

và $\angle UST$ phải là góc vuông.

$$m\angle UST = 90^\circ$$

$$15b = 90$$

Thay thế.

$$\frac{\cancel{15}b}{\cancel{15}} = \frac{90}{15}$$

Chia cả hai vế cho 15.

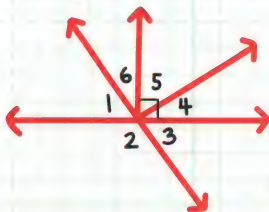
$$b = 6$$



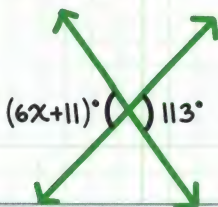


BÀI TẬP

Quan sát hình vẽ dưới đây để điền vào chỗ trống trong các câu hỏi về cặp góc từ 1 - 5.



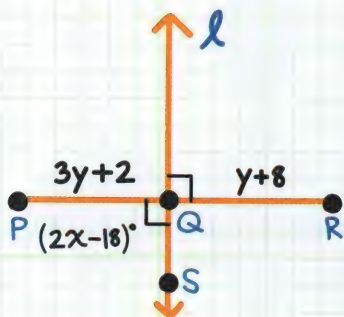
1. Các cặp góc kề nhau là: $\angle 4$ và _____, $\angle 4$ và _____
2. Cặp góc đối đỉnh là: $\angle 1$ và _____
3. Cặp góc phụ nhau là: $\angle 4$ và _____
4. Cặp góc bù nhau là: $\angle 1$ và _____
5. Cặp góc kề bù là: $\angle 3$ và _____
6. Tìm giá trị của x trong hình vẽ sau đây.





BÀI TẬP

7. Biết $\angle B$ là góc bù của $\angle A$ và $m\angle A = 107^\circ$.
Hãy tìm $m\angle B$.
8. Hai góc phụ nhau có số đo hơn kém nhau 24° . Hãy tìm số đo của hai góc đó.
9. Phân giác của góc là gì?
10. Trong hình vẽ dưới đây, ℓ là đường trung trực của \overline{PR} , $PQ = 3y + 2$, $QR = y + 8$, và $m\angle PQS = (2x - 18)$.
Hãy tìm giá trị của x và y .



LỜI GIẢI



1. $\angle 5, \angle 3$

2. $\angle 3$

3. $\angle 5$

4. $\angle 2$

5. $\angle 2$

6. $6x + 11 = 113; 6x = 102; x = 17$

7. $m\angle B = 73^\circ$

8. 57° và 33°

9. Phân giác của góc là một tia chia đôi góc đó thành hai góc bằng nhau.

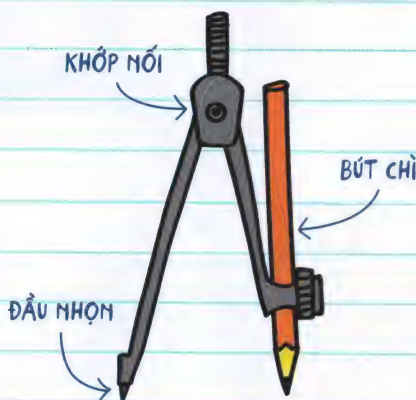
10. $PQ = QR; 3y + 2 = y + 8; 2y + 2 = 8; 2y = 6; x = 54,$
 $y = 3$

Chương 4

ĐỪNG HÌNH

Ta có thể dùng com-pa và thước để **ĐỪNG HÌNH** hay còn gọi là vẽ các hình dạng, các góc và các đường thẳng một cách chính xác.

COM-PA



THƯỚC KẼ



không
cần theo
tỷ lệ

CÁCH DỰNG ĐƯỜNG TRUNG TRỰC

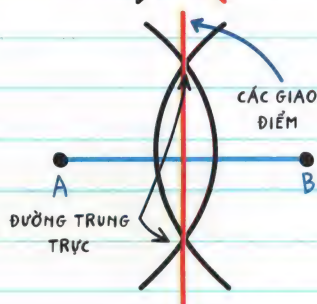
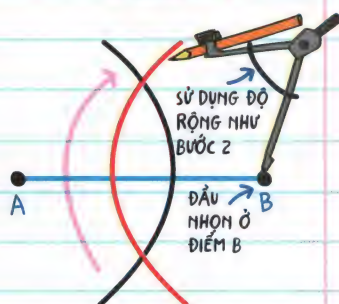
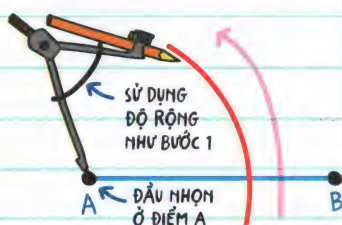
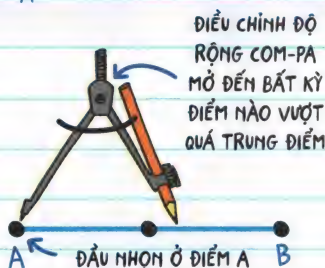
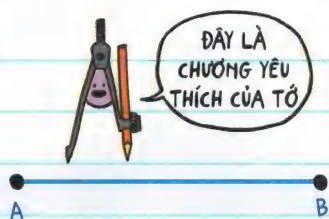
Để dựng đường trung trực của \overline{AB}

1. Cố định độ rộng của com-
pa. Giữ nguyên độ rộng
này trong cả 4 bước.

2. Vẽ một cung tròn lớn cắt
qua đoạn thẳng \overline{AB} . Đặt
đầu nhọn ở điểm A, quay
đầu bút chì từ phía dưới
đoạn thẳng lên để vẽ một
cung tròn lớn.

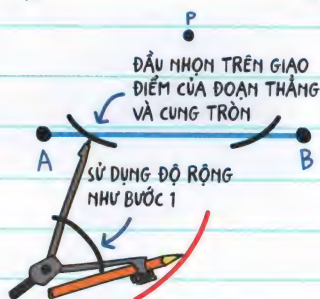
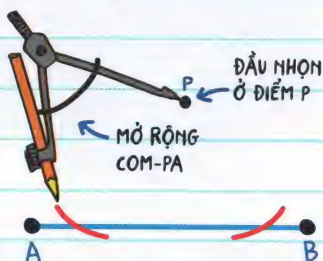
3. Lặp lại bước trên ở bên
phải. Đặt đầu nhọn ở điểm
B, quay đầu bút chì để vẽ
một cung tròn nữa sao cho
cung tròn mới chồng lên
cung tròn ban đầu.

4. Vẽ đường thẳng đứng
nối hai giao điểm của hai
cung tròn.



Cách 2: Biết điểm P nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB

1. Vẽ hai cung tròn nhỏ trên \overline{AB} . Đặt đầu nhọn com-pa tại điểm P . Mở rộng com-pa để vẽ một cung tròn nhỏ cắt qua \overline{AB} . Giữ đầu nhọn tại P , nhấc đầu bút chì lên và chuyển sang phía đối diện của đoạn thẳng để vẽ cung tròn thứ hai.

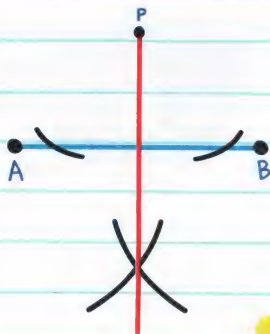


2. Vẽ một cung phía dưới \overline{AB} . Đặt đầu nhọn com-pa trên cung tròn nhỏ phía bên trái và quay đầu bút chì để tạo ra một cung tròn phía dưới đoạn thẳng, ở dưới điểm P .



3. Lặp lại bước trên ở bên phải.

4. Vẽ một đường thẳng đứng nối điểm P và giao điểm của hai cung tròn ở dưới đoạn thẳng.

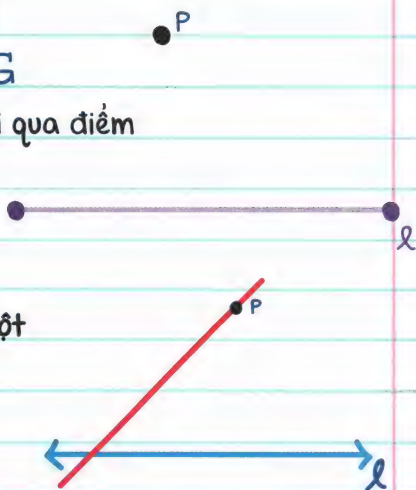


DỤNG CÁC ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Để dựng một đường thẳng đi qua điểm

P và song song với l :

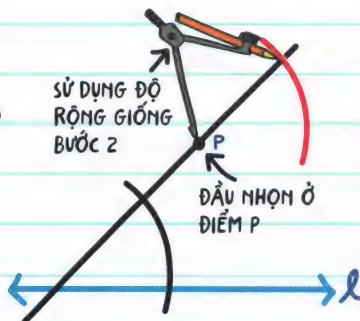
1. Sử dụng thước kẻ để vẽ một đường thẳng đi qua P và cắt một điểm bất kỳ nằm trên l .



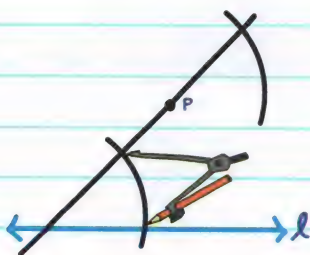
2. Vẽ một cung tròn cắt qua hai đường thẳng. Cung tròn có thể nằm ở vị trí bất kỳ dưới điểm P .



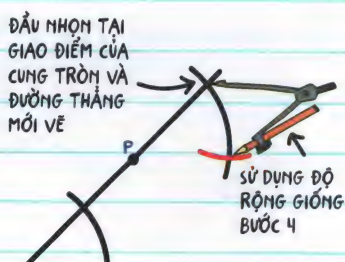
3. Chuyển đầu nhọn com-pa tới điểm P và vẽ cung tròn thứ hai phía trên P .



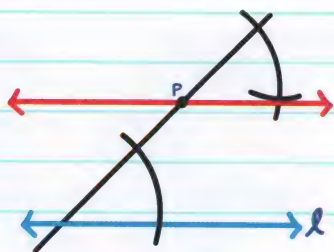
4. Điều chỉnh độ rộng compa bằng đúng khoảng cách hai giao điểm của cung tròn thứ nhất với các đường thẳng.



5. Sử dụng độ rộng đó để vẽ cung tròn nhỏ thứ ba trên cung tròn phía trên. Đánh dấu giao điểm của hai cung tròn vẽ sau.



6. Vẽ một đường thẳng nối điểm P và điểm đã được đánh dấu ở bước 5. Đường thẳng vừa vẽ song song với đường thẳng l .

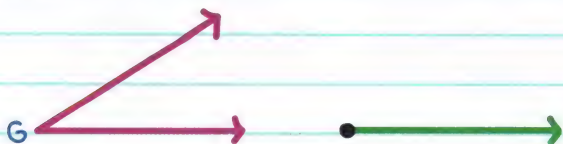


TỜ QUAY
RẤT GIỎI!

DỤNG GÓC

Để dựng một góc bằng $\angle G$:

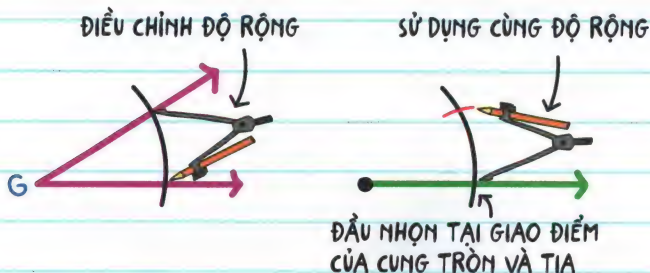
1. Vẽ một tia.



2. Vẽ một cung tròn lớn trên $\angle G$. Vẽ lại cung tròn giống như vậy trên tia mới vẽ.



3. Trên tia mới vẽ, vẽ một cung tròn nhỏ cắt qua cung đã có. Điều chỉnh độ rộng com-pa bằng cách đặt đầu nhọn và đầu bút chì vào các điểm giao cắt giữa cung tròn trên $\angle G$ và các cạnh của góc.



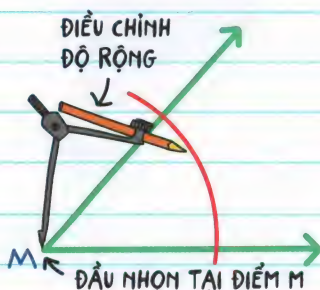
4. Vẽ một tia từ điểm gốc đến giao điểm của hai cung tròn lớn và nhỏ.



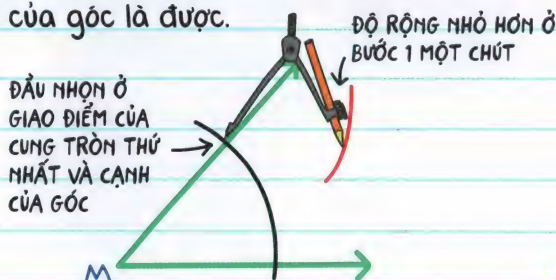
DỤNG PHÂN GIÁC CỦA GÓC

Để dựng đường phân giác của $\angle M$:

1. Vẽ một cung tròn lớn cắt cả hai cạnh của góc.



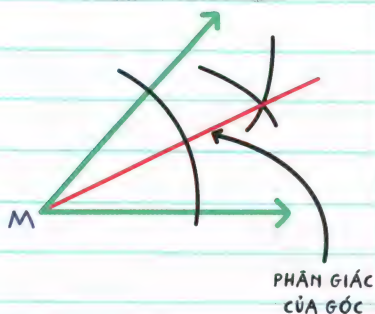
2. Vẽ một cung tròn nhỏ đi qua phần giữa của góc. Đặt đầu nhọn com-pa trên giao điểm phía trên của cung tròn lớn. Vẽ cung tròn thứ hai. Độ rộng com-pa không quá quan trọng, chỉ cần đảm bảo cung tròn thứ hai đi qua phần giữa của góc là được.



3. Lập lại bước trên ở tia đối diện. Vẽ một cung giao với cung tròn đã vẽ ở bước 2.



4. Vẽ một tia từ đỉnh của $\angle M$ qua giao điểm của hai cung tròn nhỏ.



BẠN CÓ THẤY LẮT
LÉO QUÁ KHÔNG?
TỚ THẬT LÀ
TUYỆT DIỆU!



BÀI TẬP

Vẽ lại các hình cho trước trong mỗi bài tập. Sau đó dùng thước và com-pa dựng các hình theo yêu cầu như sau:

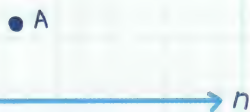
1. Đường trung trực của \overline{AB} .



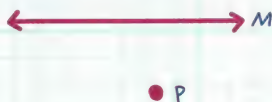
2. Đường trung trực của \overline{CD} .



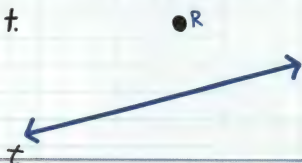
3. Đường thẳng vuông góc với đường thẳng n từ điểm A .



4. Đường thẳng vuông góc với đường thẳng m từ điểm A .



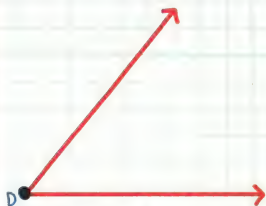
5. Đường thẳng đi qua điểm R và song song với đường thẳng t .



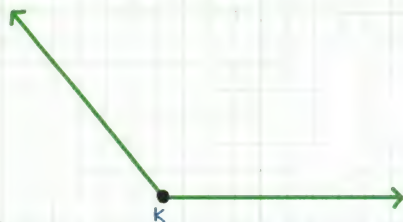


BÀI TẬP

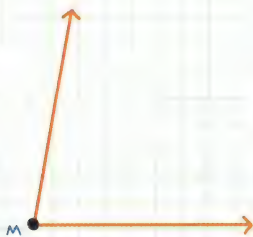
6. Góc bằng với $\angle D$



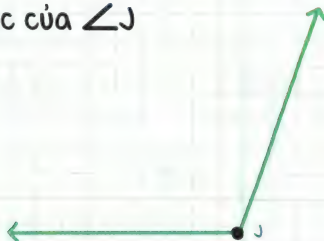
7. Góc bằng với $\angle K$



8. Phân giác của $\angle M$



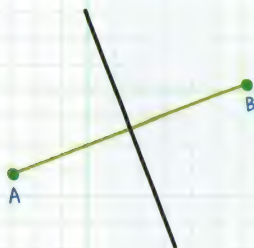
9. Phân giác của $\angle J$



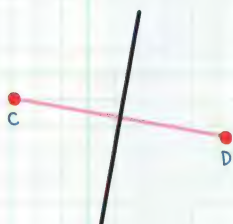
LỜI GIẢI



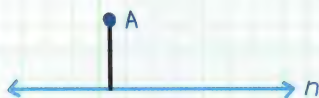
1.



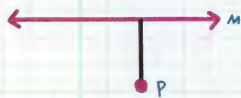
2.



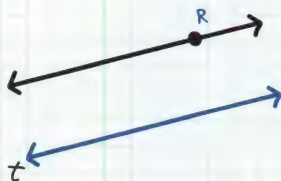
3.



4.



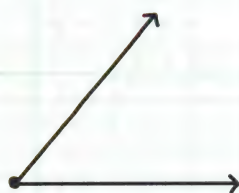
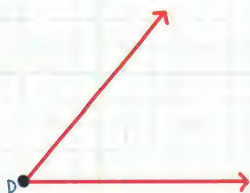
5.



LỜI GIẢI



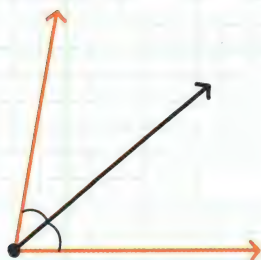
6.



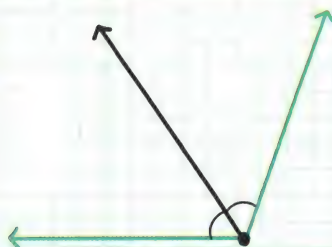
7.



8.



9.



Chương 5

LOGIC VÀ SUY LUẬN TOÁN HỌC

SUY LUẬN QUY nạp

SUY LUẬN QUY nạp được sử dụng để xây dựng các giả thiết (các giải thích) dựa trên một tập mẫu đã quan sát được. Những giải thích hay kết luận được gọi là **GIẢ ĐỊNH**.

QUAN SÁT



GIẢ ĐỊNH

VÍ DỤ:

Tất cả những con mèo Emily gặp đều kêu gừ gừ. Emily nghĩ mèo nào cũng kêu gừ gừ.

quan sát



GỪ GỪ

giả định

Suy luận quy nạp gồm các bước:

1. Nghiên cứu một vài ví dụ
2. Quan sát một mẫu
3. Giả thiết rằng mẫu luôn đúng

Để chứng minh một giả định nào đó là sai, ta chỉ cần tìm một phản ví dụ.

PHẢN VÍ DỤ là một trường hợp ngoại lệ so với những gì đã quan sát được. Nó chứng minh một mệnh đề nào đó là sai.

VÍ DỤ: Nếu Emily tìm ra một con mèo không kêu gừ gừ thì giả định mèo nào cũng kêu gừ gừ của bạn ấy là sai.

Giả định: Mèo nào cũng kêu gừ gừ.

Phản ví dụ: Một con mèo không kêu gừ gừ.

Vậy giả định là **sai**.



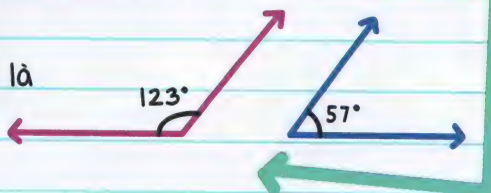
VÍ DỤ: Chứng minh giả định sau là sai:

Giả định: Tất cả các góc bù nhau đều là **CẶP GÓC KỀ BÙ**, nghĩa là kề nhau và bù nhau.

Ta xét một phản ví dụ.

Các góc này bù nhau (tổng bằng 180°)
nhưng không kề nhau.

Vậy chúng không phải là
cặp góc kề bù.



Chú ý: Phản ví dụ chỉ được dùng để chứng minh giả định là sai. Nếu ta không tìm được phản ví dụ, như vậy cũng chưa chứng minh được mệnh đề là đúng.



Mệnh đề kéo theo

MỆNH ĐỀ KÉO THEO là những mệnh đề có dạng **nếu - thì**. Ví dụ, **NẾU** một điều kiện nào đó thỏa mãn **THÌ** một hành động nào đó được thực hiện.

Mệnh đề kéo theo có thể đúng hoặc sai.

Để chứng minh một mệnh đề kéo theo là đúng, ta phải chứng minh kết luận của mệnh đề đúng trong mọi trường hợp.

Để chứng minh một mệnh đề kéo theo là sai, ta chỉ cần đưa ra một phản ví dụ chứng minh mệnh đề không đúng.

Các mệnh đề kéo theo được viết dưới dạng như sau: **Nếu p, thì q.**

Phần mệnh đề sau chữ "Nếu" được gọi là **GIẢ THIẾT (p)**.

Phần mệnh đề sau chữ "thì" được gọi là **KẾT LUẬN (q)**.

Nếu bạn thức cả đêm, thì **hôm sau đi học bạn sẽ rất mệt.**

Giả thiết (p): bạn thức cả đêm

Kết luận (q): hôm sau đi học bạn sẽ rất mệt

Nếu p, thì q có thể viết như sau:

$$p \rightarrow q$$

Các mệnh đề thông thường cũng có thể viết dưới dạng mệnh đề kéo theo. Ví dụ:

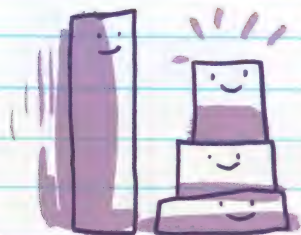
Mệnh đề thông thường:
Tất cả cá đều có mang.

Mệnh đề kéo theo:

Nếu nó là cá thì nó có mang.

[p]

[q]



VÍ DỤ: Viết các mệnh đề sau dưới dạng mệnh đề kéo theo:

Hai đoạn thẳng bằng nhau có cùng độ dài.

Mệnh đề kéo theo:

Nếu hai đoạn thẳng bằng nhau, thì

$[p]$

chúng có cùng độ dài.

$[q]$

MỆNH ĐỀ ĐẢO của một mệnh đề kéo theo được tạo ra bằng cách đổi vị trí giả thiết và kết luận.

Nếu mệnh đề ban đầu là Nếu p , thì q , thì mệnh đề đảo sẽ là:

Nếu q , thì p , hoặc $q \rightarrow p$.

KÉO THEO	ĐẢO
$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$

Mệnh đề đảo của một mệnh đề kéo theo đúng không phải luôn luôn đúng.

VÍ DỤ:

Mệnh đề kéo theo:

Nếu thấy một chú cún con, thì **thì bạn ấy sẽ cười.**

[p]

[q]

Mệnh đề đảo:

Nếu **Lily cười**, thì bạn ấy thấy một chú cún con.

[q]

[p]

Mệnh đề đảo **không đúng** trong trường hợp này.



VÍ DỤ: Viết mệnh đề đảo của mệnh đề kéo theo đã cho và cho biết nó đúng hay sai.

Mệnh đề kéo theo: Nếu $x = 5$, thì $x^2 = 25$.
[p] [q]

Mệnh đề đảo là:

Nếu $x^2 = 25$, thì $x = 5$.
[q] [p]

Mệnh đề này không đúng. x có thể bằng -5 , vì $(-5)^2 = 25$.

Phản ví dụ $x = -5$ chứng minh rằng mệnh đề đảo là sai.

Mệnh đề tương đương

Trong một mệnh đề **TƯƠNG ĐƯƠNG** thì mệnh đề kéo theo là đúng và mệnh đề đảo của nó cũng đúng.

Tương đương nghĩa là có hai. Một mệnh đề tương đương là sự kết hợp của hai mệnh đề.

Mệnh đề kéo theo đúng + Mệnh đề đảo đúng = Tương đương

Một mệnh đề tương đương được viết như sau:

p khi và chỉ khi q (Mệnh đề tương đương còn được gọi là điều kiện cần và đủ)

Ta cũng viết như sau::

hai cách viết
giống nhau

$$p \leftrightarrow q$$

Viết như trên nghĩa là: nếu p, thì q, và nếu q, thì p.

$$(p \rightarrow q \quad \text{và} \quad q \rightarrow p)$$

Điều kiện cần: Nếu $\angle A$ và $\angle B$ bằng nhau, thì
[p]

chúng có cùng số đo.
[q]

$$p \rightarrow q$$

Điều kiện đủ: Nếu $\angle A$ và $\angle B$ có cùng số đo, thì
[q]

chúng bằng nhau.
[p]

$$q \rightarrow p$$

Mệnh đề tương đương: $\angle A$ và $\angle B$ bằng nhau khi và chỉ khi
[p]

chúng có cùng số đo.
[q]

$$p \leftrightarrow q$$

VÍ DỤ:

Điều kiện cần: Nếu $\angle A$ là góc bẹt, thì $m\angle A = 180^\circ$.
[p] [q]

Điều kiện đủ: Nếu $m\angle A = 180^\circ$, thì $\angle A$ là góc bẹt.
[q] [p]

Mệnh đề tương đương: $\angle A$ là góc bẹt khi và chỉ khi
[p]

$m\angle A = 180^\circ$.
[q]

SUY LUẬN DIỄN DỊCH

SUY LUẬN DIỄN DỊCH sử dụng những tiên đề và các mệnh đề đã biết để đưa ra kết luận một cách logic.

Quy tắc suy luận diễn dịch

Có hai quy tắc trong suy luận diễn dịch:

- Phân tách
- Tam đoạn luận

QUY TẮC PHÂN TÁCH

Nếu các mệnh đề $p \rightarrow q$ và p là đúng,
thì mệnh đề thứ ba q cũng đúng.

Biết hai mệnh đề sau là đúng:

1. Nếu John ăn sushi, thì bạn ấy dùng đũa.
[p] [q]

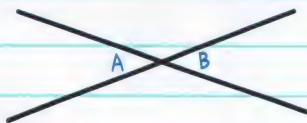
2. John ăn sushi.
[p]

Sử dụng QUY TẮC PHÂN TÁCH,
ta có thể rút ra kết luận là mệnh đề:

John dùng đũa là đúng.
[q]



VÍ DỤ: Ta có kết luận gì
từ các mệnh đề sau?



Nếu $\angle A$ và $\angle B$ là các góc đối đỉnh, thì $m\angle A = m\angle B$.
[p] [q]

$\angle A$ và $\angle B$ là hai góc đối đỉnh.
[p]

$m\angle A = m\angle B$
[q]

QUY TẮC TAM ĐOẠN LUẬN

Nếu các mệnh đề $p \rightarrow q$ và $q \rightarrow r$ đều đúng,
thì mệnh đề $p \rightarrow r$ cũng đúng.

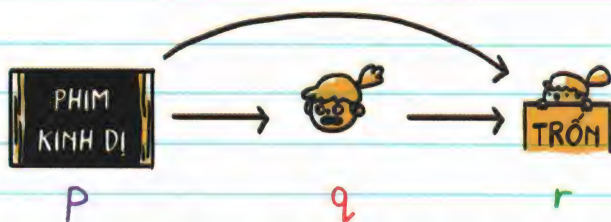
Cho các mệnh đề sau là đúng.

1. Nếu tôi xem một bộ phim kinh dị, thì tôi sẽ hét lên.
[p] [q]

2. Nếu tôi hét, thì tôi sẽ trốn vào trong chăn.
[q] [r]

Sử dụng QUY TẮC TAM ĐOẠN LUẬN, ta có thể rút ra rằng:

Nếu tôi xem phim kinh dị, thì tôi sẽ trốn trong chăn.
[p] [r]



Suy luận quy nạp: sử dụng những ví dụ cụ thể hoặc những quan sát từ thực tế để đưa ra kết luận.

ĐIỀU KIỆN CẦN: Nếu p , thì q . ($p \rightarrow q$)

ĐIỀU KIỆN CẦN VÀ ĐỦ: p khi và chỉ khi q . ($p \leftrightarrow q$)

Suy luận diễn dịch: sử dụng các tiên đề hoặc mệnh đề đã biết để đưa ra kết luận một cách logic.

QUY TẮC PHÂN TÁCH: Nếu $p \rightarrow q$ là đúng và p là đúng, thì q là đúng.

QUY TẮC TAM ĐOẠN LUẬN: Nếu $p \rightarrow q$ và $q \rightarrow r$ là đúng, thì $p \rightarrow r$ là đúng.





BÀI TẬP

1. Thế nào là suy luận quy nạp?

2. Chứng minh suy đoán sau là sai bằng một phản ví dụ:

Tất cả các góc bù đều kề nhau.

3. Viết câu sau dưới dạng một mệnh đề kéo theo.

Tất cả chim cánh cụt đều là chim.

4. Viết mệnh đề đảo của mệnh đề kéo theo sau đây và cho biết nó có đúng không?

Nếu $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, thì $AB = CD$.

5. Sử dụng điều kiện cần và điều kiện đủ sau đây để đưa ra một mệnh đề tương đương.

Điều kiện cần: Nếu $m\angle A = 90^\circ$, thì $\angle A$ là góc vuông.

Điều kiện đủ: Nếu $\angle A$ là góc vuông, thì $m\angle A = 90^\circ$.

6. Suy luận diễn dịch là gì?

7. Biết các mệnh đề sau đây là đúng, hãy sử dụng quy tắc phân tách để viết một kết luận logic.

Cho trước: Nếu \overrightarrow{BD} chia đôi $\angle ABC$, thì $m\angle ABD = m\angle DBC$.

\overrightarrow{BD} chia đôi $\angle ABC$.

8. Biết các mệnh đề sau đây là đúng, hãy sử dụng quy tắc tam đoạn luận để viết mệnh đề thứ ba.

Nếu Abby chăm học thì bạn ấy sẽ đạt điểm cao.

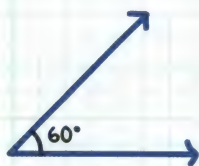
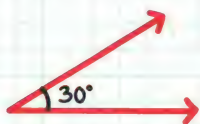
Nếu Abby đạt điểm cao thì bạn ấy sẽ đỗ vào đại học tốt.

LỜI GIẢI



1. Suy luận quy nạp là sử dụng những ví dụ cụ thể hoặc những quan sát từ thực tế để đưa ra kết luận.

2. Một ví dụ là:



3. Nếu con vật là chim cánh cụt thì nó là chim.

4. Nếu $AB = CD$, thì $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. Điều này là đúng.

5. $m\angle A = 90^\circ$ khi và chỉ khi $\angle A$ là góc vuông.

6. Suy luận diễn dịch sử dụng các tiên đề hoặc mệnh đề đã biết để đưa ra kết luận một cách logic.

7. $m\angle ABD = m\angle DBC$

8. Nếu Abby chăm học thì bạn ấy sẽ đỗ vào đại học tốt.

Chương 6

CÁC PHÉP CHỨNG MINH TRONG HÌNH HỌC

PHÉP CHỨNG MINH

Một minh chứng hay một lập luận logic có thể được dùng để chứng tỏ tại sao một suy đoán nào đó là đúng.

Chúng ta sử dụng các tính chất của đẳng thức (trong đại số) và các tính chất của quan hệ bằng nhau để trình bày phép chứng minh.

PHẢN VÍ DỤ CHỨNG
MINH SUY ĐOÁN LÀ SAI.
PHÉP CHỨNG MINH
CHỨNG TỎ SUY ĐOÁN
LÀ ĐÚNG!



TÍNH CHẤT CỦA ĐẲNG THỨC: Tất cả những gì ta làm với một vế của đẳng thức cũng phải thực hiện y hệt với vế kia.

TÍNH CHẤT CỦA ĐẲNG THỨC VÀ QUAN HỆ BẰNG NHAU

TÍNH CHẤT

ĐỊNH NGHĨA

VÍ DỤ

TÍNH CHẤT
CỘNG - TRỪ
ĐẲNG THỨC

Khi cộng/trừ cả hai vế đẳng thức với/cho cùng một số ta được phương trình tương đương.

Nếu $a = b$, thì
 $a + c = b + c$.
 $a - c = b - c$.

TÍNH CHẤT
NHÂN ĐẲNG
THỨC

Khi nhân cả hai vế đẳng thức với cùng một số ta được phương trình tương đương.

Nếu $a = b$, thì
 $a \times c = b \times c$.

TÍNH CHẤT
CHIA ĐẲNG
THỨC

Khi chia cả hai vế đẳng thức với cùng một số khác không ta được phương trình tương đương.

Nếu $a = b$,
thì $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$
($c \neq 0$).

TÍNH CHẤT
PHẢN XẠ CỦA
ĐẲNG THỨC -
QUAN HỆ BẰNG
NHAU

Một số bất kỳ luôn bằng chính nó.

$a = a$
 $\overline{AB} \cong \overline{AB}$

TÍNH CHẤT

ĐỊNH NGHĨA

VÍ DỤ

TÍNH CHẤT
ĐỐI XỨNG CỦA
ĐẲNG THỨC

TÍNH CHẤT ĐỐI
XỨNG CỦA QUAN
HỆ BẰNG NHAU

Ta có thể hoán đổi
vị trí hai vế đẳng
thức vẫn thu được
đẳng thức tương
đương.

Nếu $a = b$, thì
 $b = a$.

Nếu $\overline{AB} \cong \overline{CD}$,
thì $\overline{CD} \cong \overline{AB}$.

TÍNH CHẤT
BẮC CẦU CỦA
ĐẲNG THỨC

TÍNH CHẤT BẮC
CẦU CỦA QUAN HỆ
BẰNG NHAU

Nếu hai số cùng
bằng một số thứ
ba thì chúng bằng
nhau.

Nếu $a = b$ và
 $b = c$, thì $a = c$.

Nếu $\overline{AB} \cong \overline{CD}$
và $\overline{CD} \cong \overline{EF}$, thì
 $\overline{AB} \cong \overline{EF}$.

TÍNH CHẤT
THAY THẾ CỦA
ĐẲNG THỨC

Nếu hai số bằng
nhau thì ta có thể
thay thế số này
bằng số kia trong
các biểu thức.

Nếu $a = b$, thì ta
có thể thay b vào
vị trí của a trong
biểu thức bất kỳ.

TÍNH CHẤT
PHÂN PHỐI

Nhân số ở ngoài dấu
ngoặc với mỗi hạng
tử trong dấu ngoặc
ta được biểu thức có
giá trị không đổi.

$$a(b + c) \\ = ab + ac$$

Có nhiều phương pháp chứng minh khác nhau, và khi giải mỗi bài toán không phải chỉ có duy nhất một phương án đúng, ta có thể trình bày theo nhiều cách miễn là các bằng chứng đưa ra hợp logic và phù hợp với điều cần chứng minh.



Chứng minh hai cột

Phép **CHỨNG MINH HAI CỘT** là phương pháp chứng minh liệt kê lập luận thành một bảng gồm hai cột. Đầu tiên là các mệnh đề đã cho, sau đó là các bước dẫn tới mệnh đề cần chứng minh.

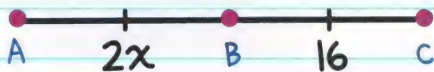
Với mỗi mệnh đề ở cột bên trái đều có giải thích ở cột bên phải. Phần giải thích có thể là:

- thông tin đã biết
- định nghĩa
- định lý
- tính chất
- tiên đề

Phép chứng minh hai cột được trình bày theo mẫu sau:

Giả thiết: $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, $AB = 2x$, $BC = 16$

Kết luận: $x = 8$



GỢI Ý CHO PHÉP CHỨNG MINH HAI CỘT:

- Dự định chi tiết các bước chứng minh.
- Vẽ một bức tranh và gán nhãn lên đó.
- Bắt đầu bằng các thông tin đã biết.
- Kết thúc bằng mệnh đề cần chứng minh.
- Viết các mệnh đề theo thứ tự sao cho chúng tuân theo một quá trình xuyên suốt từ mệnh đề đầu tiên đến mệnh đề cuối cùng. Số các mệnh đề có thể khác nhau tùy từng bài chứng minh.
- Giải thích từng mệnh đề mới đưa ra.
- Phân giải thích có thể là: thông tin đã biết, định lý, tiên đề, định nghĩa, tính chất.
- Nếu gặp phải thế bí hãy quay trở lại. Cố gắng tìm ra mệnh đề tiếp theo dẫn tới kết quả.

MỆNH ĐỀ

1. $\overline{AB} \cong \overline{BC}$

$AB = 2x, BC = 16$

2. $AB = BC$

mỗi mệnh đề đều cần giải thích

3. $2x = 16$

4. $x = 8$

GIẢI THÍCH

1. Giả thiết đã cho

luôn bắt đầu bằng giả thiết đã cho

2. Định nghĩa đoạn thẳng bằng nhau

các bước logic để suy từ mệnh đề 1 đến 4

3. Tính chất thay thế của đẳng thức

4. Tính chất chia của đẳng thức

điều phải chứng minh

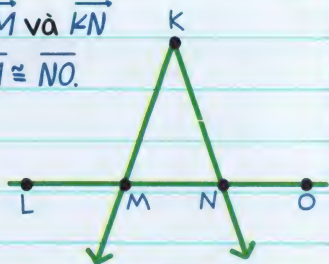
VÍ DỤ: Chứng minh rằng nếu \overrightarrow{KM} và \overrightarrow{KN} lần lượt chia đôi \overline{LN} và \overline{MO} , thì $\overline{LM} \cong \overline{NO}$.

Liệt kê tất cả các thông tin đã biết.

Ta đã biết:

\overrightarrow{KM} là đường chia đôi \overline{LN} ,
nên ta có: $\overline{LM} \cong \overline{MN}$

\overrightarrow{KN} là đường chia đôi \overline{MO} ,
nên: $\overline{MN} \cong \overline{NO}$



TÔI SẼ DÙNG
TÍNH CHẤT BẮC CẦU
CỦA QUAN HỆ BẰNG NHAU ĐỂ
CHỨNG MINH RẰNG $\overline{LM} \cong \overline{NO}$.



TÍNH CHẤT BẮC CẦU CỦA QUAN HỆ BẰNG NHAU

Nếu $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ và $\overline{CD} \cong \overline{EF}$, thì $\overline{AB} \cong \overline{EF}$.

Phép chứng minh hai cột là:

Giả thiết: \overrightarrow{KM} là đường chia đôi \overline{LN} .

\overrightarrow{KN} là đường chia đôi \overline{MO} .

Kết luận: $\overline{LM} \cong \overline{NO}$

MỆNH ĐỀ

GIẢI THÍCH

1. \overline{KM} là đường chia đôi \overline{LN} .

\overline{KN} là đường chia đôi \overline{MO} .

2. $\overline{LM} \cong \overline{MN}$

3. $\overline{MN} \cong \overline{NO}$

4. $\overline{LM} \cong \overline{NO}$

1. Giả thiết đã cho

2. Định nghĩa chia đôi đoạn thẳng

3. Định nghĩa chia đôi đoạn thẳng

4. Tính chất bắc cầu của quan hệ bằng nhau

Chú ý: Vì các mệnh đề 2 và 3 có chung giải thích nên ta có thể gộp hai bước thành một.

Chứng minh bằng lưu đồ

Phép **CHỨNG MINH BẰNG LƯU ĐỒ** là một sơ đồ sử dụng các khối hộp và các mũi tên để biểu diễn thứ tự logic của một mệnh đề dẫn tới kết luận cần có.

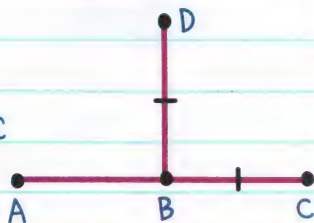
GỢI Ý CHO PHÉP CHỨNG MINH BẰNG LƯU ĐỒ:

- ☐ Đặt mỗi mệnh đề vào một ô vuông.
- ☐ Đưa ra giải thích phía dưới ô vuông.
- ☐ Bắt đầu bằng các thông tin đã biết.
- ☐ Nếu giả thiết cho trước nhiều mệnh đề, hãy tách mỗi mệnh đề vào một ô vuông riêng.
- ☐ Đưa ra các mệnh đề mới kèm việc giải thích theo một trình tự logic.
- ☐ Kết thúc bằng mệnh đề cần chứng minh.

VÍ DỤ:

Giả thiết: \overline{BD} chia đôi \overline{AC} , $BD = BC$

Kết luận: $AB = BD$



\overline{BD} chia đôi \overline{AC}

Giả thiết đã cho

$\overline{AB} \cong \overline{BC}$

Định nghĩa chia đôi
đoạn thẳng

$\overline{AB} \cong \overline{BD}$

Tính chất bắc cầu của quan hệ bằng nhau

$AB = BD$

Định nghĩa đoạn thẳng bằng nhau

$BD = BC$

Giả thiết đã cho

$\overline{BD} \cong \overline{BC}$

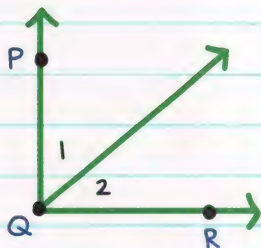
Định nghĩa
quan hệ bằng nhau

VÍ DỤ:

Giả thiết: $\angle PQR$ là góc vuông

Kết luận: $\angle 1$ và $\angle 2$ là

các góc phụ nhau



$\angle PQR$ là góc vuông

Giả thiết đã cho

$$m\angle PQR = 90^\circ$$

Định nghĩa góc vuông

$$m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle PQR$$

Tiên đề cộng góc

$$m\angle 1 + m\angle 2 = 90^\circ$$

Thay thế

$\angle 1$ và $\angle 2$ là các góc phụ nhau

Định nghĩa các góc phụ nhau

Chứng minh bằng đoạn văn

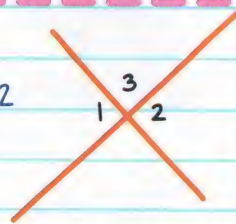
Phép **CHỨNG MINH BẰNG ĐOẠN VĂN** (hay chứng minh không hình thức) diễn giải tại sao một suy đoán là đúng dưới dạng một đoạn văn. Phép chứng minh này vẫn đi theo các bước logic và đưa ra giải thích cho mỗi bước. Phương pháp này ít theo quy chuẩn hơn phương pháp chứng minh hai cột.

VÍ DỤ:

Chứng minh các góc đối đỉnh $\angle 1$ và $\angle 2$ bằng nhau.

Đoạn văn mẫu::

Ta có $\angle 1$ và $\angle 2$ là các góc đối đỉnh. Vì các cặp góc kề bù là các góc bù nhau nên $m\angle 1 + m\angle 3 = 180^\circ$ và $m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$. Sử dụng tính chất thay thế ta có $m\angle 1 + m\angle 3 = m\angle 2 + m\angle 3$. Trừ cả hai vế cho $m\angle 3$ ta được $m\angle 1 = m\angle 2$. Từ định nghĩa góc bằng nhau ta có $\angle 1 \cong \angle 2$.



VÍ DỤ:

Giả thiết: $\angle 1 \cong \angle 2$, $m\angle 2 = m\angle 3$

Kết luận: $\angle 1 \cong \angle 3$.

Sau đây là phần chứng minh theo ba cách khác nhau.

Chứng minh hai cột

Giả thiết: $\angle 1 \cong \angle 2$, $m\angle 2 = m\angle 3$

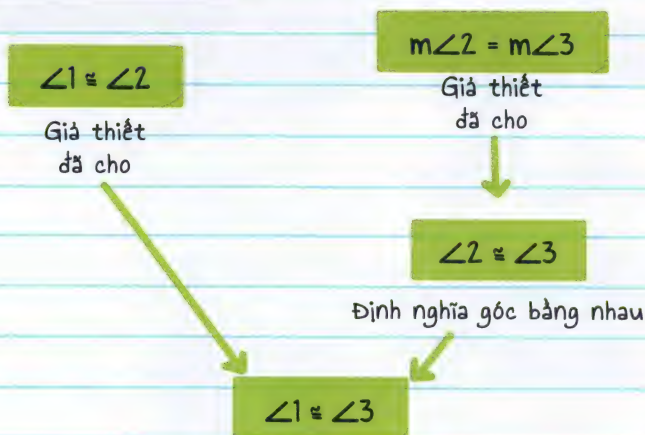
Kết luận: $\angle 1 \cong \angle 3$

MỆNH ĐỀ	GIẢI THÍCH
1. $\angle 1 \cong \angle 2$, $m\angle 2 = m\angle 3$	1. Giả thiết đã cho
2. $\angle 2 \cong \angle 3$	2. Định nghĩa góc bằng nhau
3. $\angle 1 \cong \angle 3$	3. Tính chất bắc cầu của quan hệ bằng nhau



VÍ DỤ:

Chứng minh bằng lưu đồ



Tính chất bắc cầu của quan hệ bằng nhau

Chứng minh bằng đoạn văn

Ta đã biết $m\angle 2 = m\angle 3$. Từ định nghĩa góc bằng nhau ta có $\angle 2 \cong \angle 3$. Mặt khác, giả thiết cũng cho biết $\angle 1 \cong \angle 2$. Do vậy, từ tính chất bắc cầu của quan hệ bằng nhau ta có $\angle 1 \cong \angle 3$.



BÀI TẬP

Từ câu 1 - 5, hãy chỉ rõ tính chất nào của đẳng thức hoặc quan hệ bằng nhau biểu diễn trong mệnh đề đã cho.

1. Nếu $4x = 16$, thì $x = 4$.

2. $2x + 1 = 2x + 1$

3. Nếu $y = 3x + 4$ và $y = 5$, thì $5 = 3x + 4$.

4. Nếu $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ và $\overline{CD} \cong \overline{EF}$, thì $\overline{AB} \cong \overline{EF}$.

5. Nếu $\angle P \cong \angle Q$, thì $\angle Q \cong \angle P$.



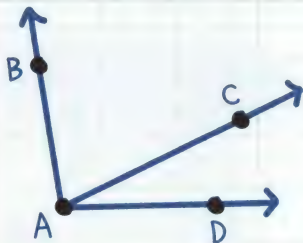
BÀI TẬP

6. Điền vào chỗ trống trong phần chứng minh hai cột dưới đây.

Giả thiết: $m\angle BAD = 97^\circ$,

$m\angle CAD = 32^\circ$

Kết luận: $m\angle BAC = 65^\circ$



MỆNH ĐỀ	GIẢI THÍCH
1. _____	1. _____
2. $m\angle BAC + m\angle CAD = m\angle BAD$	2. Tiên đề cộng góc
3. $m\angle BAC + 32^\circ = 97^\circ$	3. _____
4. _____	4. Tính chất trừ của đẳng thức

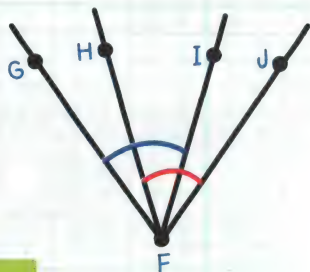


BÀI TẬP

7. Điền các bước còn thiếu trong phần chứng minh bằng lưu đồ để chứng minh rằng $m\angle GFH = m\angle IFJ$.

Giả thiết: $m\angle GFI = m\angle HFJ$

Kết luận: $m\angle GFH = m\angle IFJ$



Giả thiết đã cho

$$m\angle GFI = m\angle GFH + m\angle HFI$$

Tiên đề cộng góc

Tiên đề cộng góc

Thay thế

$$m\angle HFI = m\angle HFI$$

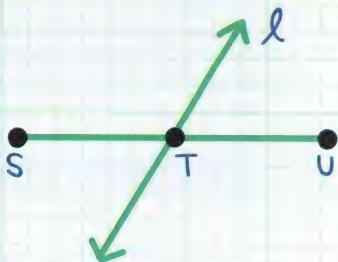
Tính chất phản xạ

$$m\angle GFH = m\angle IFJ$$



BÀI TẬP

8. Điền vào các chỗ trống còn thiếu trong phần chứng minh bằng đoạn văn.



Giả thiết: l chia đôi \overline{SU}

Kết luận: $ST = \frac{1}{2} SU$

Ta đã biết l chia đôi \overline{SU} . Theo tiên đề cộng đoạn thẳng ta có: _____. Theo định nghĩa _____ ta có $\overline{ST} \cong \overline{TU}$. Các đoạn thẳng bằng nhau có độ dài bằng nhau, vậy _____. Thay thế biểu thức này vào $ST + TU = SU$ ta được $ST = \frac{1}{2} SU$.

9. Điền vào các chỗ trống còn thiếu trong phần chứng minh bằng đoạn văn.

Giả thiết: $\angle 2 \cong \angle 3$, $\angle 1$ và $\angle 2$ là các góc đối đỉnh

Kết luận: $m\angle 1 = m\angle 3$

Vì $\angle 1$ và $\angle 2$ là các góc đối đỉnh nên _____.

Giả thiết đã cho $\angle 2 \cong \angle 3$. Theo _____ ta có

$\angle 1 \cong \angle 3$. Các góc bằng nhau có số đo bằng nhau nên _____.

LỜI GIẢI



1. Tính chất chia của đẳng thức (hoặc tính chất nhân của đẳng thức)
2. Tính chất phản xạ của đẳng thức
3. Tính chất thay thế của đẳng thức (hoặc tính chất bắc cầu của đẳng thức)
4. Tính chất bắc cầu của quan hệ bằng nhau
5. Tính chất đối xứng của quan hệ bằng nhau

6.	MỆNH ĐỀ	GIẢI THÍCH
1.	$m\angle BAD = 97^\circ, m\angle CAD = 32^\circ$	1. Giả thiết đã cho
2.	$m\angle BAC + m\angle CAD = m\angle BAD$	2. Tiên đề cộng góc
3.	$m\angle BAC + 32^\circ = 97^\circ$	3. Tính chất thay thế của đẳng thức
4.	$m\angle BAC = 65^\circ$	4. Tính chất trừ của đẳng thức

LỜI GIẢI



$$m\angle GFI = m\angle HFJ$$

Giả thiết đã cho

$$m\angle GFI = m\angle GFH + m\angle HFI$$

Tiên đề cộng góc

$$m\angle HFJ = m\angle HFI + m\angle IFJ$$

Tiên đề cộng góc

$$m\angle GFH + m\angle HFI = m\angle HFI + m\angle IFJ$$

Thay thế

$$m\angle HFI = m\angle HFI$$

Tính chất phản xạ

$$m\angle GFH = m\angle IFJ$$

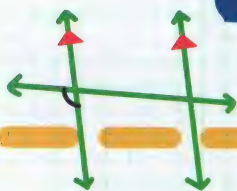
Tính chất trừ của đẳng thức

8. Ta đã biết ℓ chia đôi \overline{SU} . Theo tiên đề cộng đoạn thẳng ta có: $ST + TU = SU$. Theo định nghĩa chia đôi đoạn thẳng ta có $\overline{ST} \cong \overline{TU}$. Các đoạn thẳng bằng nhau có độ dài bằng nhau, vậy $ST = TU$. Thay thế biểu thức này vào $ST + TU = SU$ ta được $ST = \frac{1}{2} SU$.

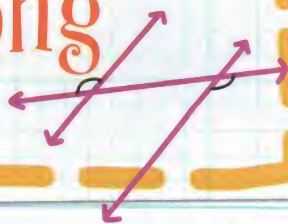
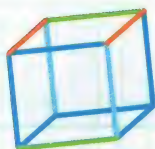
9. Vì $\angle 1$ và $\angle 2$ là các góc đối đỉnh nên $\angle 1 \cong \angle 2$. Giả thiết đã cho $\angle 2 \cong \angle 3$. Theo tính chất bắc cầu của quan hệ bằng nhau ta có $\angle 1 \cong \angle 3$. Các góc bằng nhau có số đo bằng nhau nên $m\angle 1 = m\angle 3$.



BÀI 2



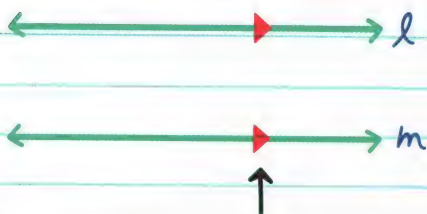
Đường thẳng
song song



Chương 7

ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VÀ CẮT TUYẾN

Hai **ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG** là các đường thẳng nằm trên cùng một mặt phẳng và không bao giờ gặp nhau (cắt nhau). Chúng được ký hiệu bằng các mũi tên.



các mũi tên trên hai đường thẳng thể hiện chúng song song

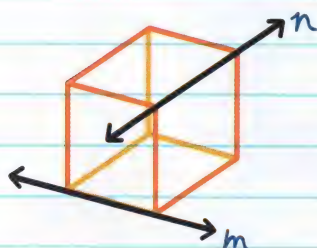
Các đường thẳng song song luôn có cùng khoảng cách trên suốt chiều dài.

Ký hiệu \parallel được dùng để biểu diễn các đường thẳng song song:

$l \parallel m$

\parallel là ký hiệu "song song với"
 \nparallel là ký hiệu "không song song với"

Hai **ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU** là hai đường thẳng nằm trên hai mặt phẳng khác nhau và không bao giờ gặp nhau.



n và m là hai đường thẳng chéo nhau



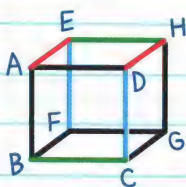
Hai **MẶT PHẲNG SONG SONG** là hai mặt phẳng không bao giờ cắt nhau.



Mặt phẳng $P \parallel$ Mặt phẳng Q

Hai đoạn thẳng hay tia được gọi là song song nếu các đường thẳng chứa chúng song song với nhau, và hai đường thẳng hay tia được gọi là chéo nhau nếu các đường thẳng chứa chúng chéo nhau.

VÍ DỤ:

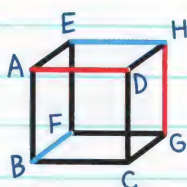


Đoạn thẳng song song

$$\overline{AE} \parallel \overline{DH}$$

$$\overline{EF} \parallel \overline{DC}$$

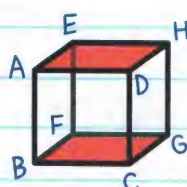
$$\overline{BC} \parallel \overline{EH}$$



Đoạn thẳng chéo nhau

$$\overline{AD} \text{ và } \overline{HG}$$

$$\overline{BF} \text{ và } \overline{EH}$$



Mặt phẳng song song

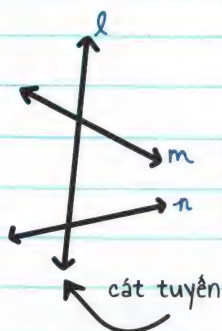
Mặt phẳng $AEH \parallel$

Mặt phẳng BCG

CẮT TUYẾN

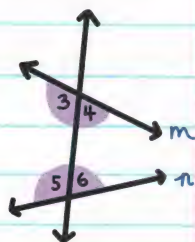
CẮT TUYẾN là một đường thẳng cắt hai hay nhiều đường thẳng khác.

Các góc tạo bởi một cắt tuyến và hai đường thẳng mà nó cắt qua đều có tên gọi đặc biệt.



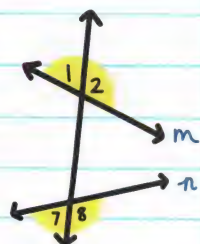
GÓC TRONG là tất cả các góc nằm giữa hai đường thẳng cắt bởi cắt tuyến.

Các góc trong:
 $\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$

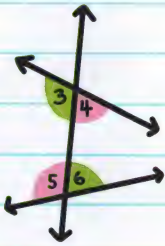
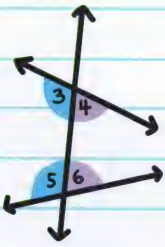
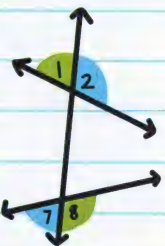


GÓC NGOÀI là tất cả các góc không nằm giữa hai đường thẳng cắt bởi cắt tuyến.

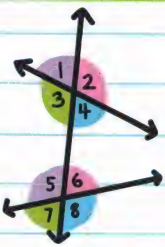
Các góc ngoài:
 $\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$



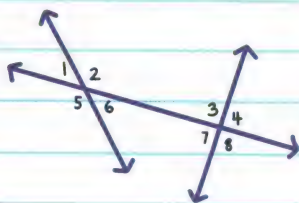
CÁC CẶP GÓC TẠO BỞI CÁT TUYẾN

CẶP GÓC	VÍ DỤ	TÍNH CHẤT
GÓC SO LẺ TRONG	 <p>$\angle 3$ và $\angle 6$ $\angle 4$ và $\angle 5$</p>	các góc trong ở hai phía đối diện nhau của cát tuyến
GÓC TRONG CÙNG PHÍA (GÓC TRONG ĐỒNG VỊ)	 <p>$\angle 3$ và $\angle 5$ $\angle 4$ và $\angle 6$</p>	các góc trong ở cùng một phía của cát tuyến
GÓC SO LẺ NGOÀI	 <p>$\angle 1$ và $\angle 8$ $\angle 2$ và $\angle 7$</p>	các góc ngoài ở hai phía đối diện nhau của cát tuyến

CÁC CẶP GÓC TẠO BỞI CÁT TUYẾN

CẶP GÓC	VÍ DỤ	TÍNH CHẤT
GÓC ĐỒNG VỊ	 <p> $\angle 1$ và $\angle 5$ $\angle 2$ và $\angle 6$ $\angle 3$ và $\angle 7$ $\angle 4$ và $\angle 8$ </p>	có cùng vị trí tương đối trên mỗi đường thẳng ở cùng một phía của cát tuyến

VÍ DỤ: Viết tên tất cả các cặp góc so le trong, trong cùng phía, so le ngoài và các góc đồng vị trong hình vẽ đã cho.



Các góc so le trong: $\angle 2$ và $\angle 7$, $\angle 3$ và $\angle 6$

Các góc trong cùng phía: $\angle 2$ và $\angle 3$, $\angle 6$ và $\angle 7$

Các góc so le ngoài: $\angle 1$ và $\angle 8$, $\angle 4$ và $\angle 5$

Các góc đồng vị: $\angle 1$ và $\angle 3$, $\angle 2$ và $\angle 4$,
 $\angle 5$ và $\angle 7$, $\angle 6$ và $\angle 8$

Trường hợp nhiều cát tuyến

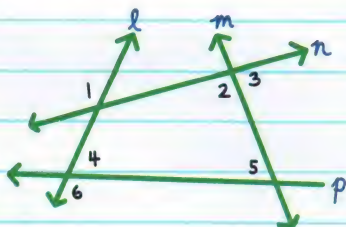
Hình vẽ sau biểu diễn bốn cát tuyến. Tất cả các đường thẳng trong hình đều là cát tuyến cắt hai đường thẳng khác:

l là cát tuyến cắt n và p .

m là cát tuyến cắt n và p .

n là cát tuyến cắt l và m .

p là cát tuyến cắt l và m .

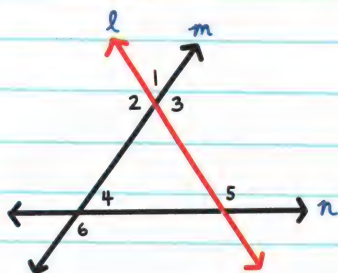
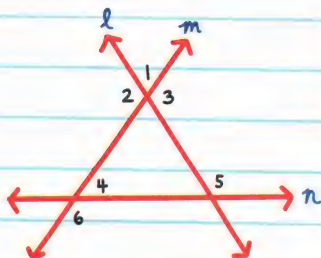


Một số cặp góc đặc biệt tạo bởi một cát tuyến trong hình vẽ trên là:

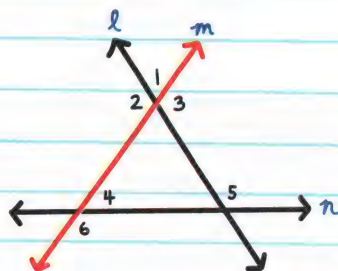
- $\angle 1$ và $\angle 6$: là các góc so le ngoài tạo bởi cát tuyến l .
- $\angle 1$ và $\angle 3$: là các góc so le ngoài tạo bởi cát tuyến n .
- $\angle 3$ và $\angle 5$: là các góc so le trong tạo bởi cát tuyến m .
- $\angle 4$ và $\angle 5$: là các góc trong cùng phía tạo bởi cát tuyến p .
- $\angle 2$ và $\angle 5$: là các góc trong cùng phía tạo bởi cát tuyến m .

VÍ DỤ: Viết tên tất cả các cặp góc tạo bởi cát tuyến trong hình vẽ đã cho.

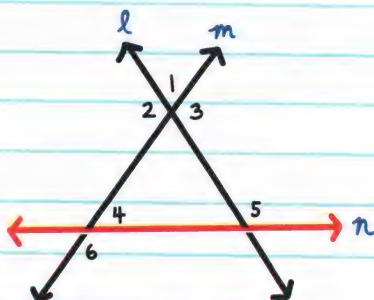
Mỗi đường thẳng là một cát tuyến cắt hai đường thẳng khác.



l là cát tuyến
cắt m và n .



m là cát tuyến
cắt l và n .



n là cát tuyến
cắt l và m .

Các cặp góc tạo bởi cát tuyến là:

Các góc so le trong:

$\angle 2$ và $\angle 4$, cát tuyến m

($\angle 2$ và $\angle 4$ nằm giữa hai đường thẳng l và n)

Các góc trong cùng phía:

$\angle 3$ và $\angle 5$, cát tuyến l

($\angle 3$ và $\angle 5$ nằm giữa hai đường thẳng m và n)

Các góc so le ngoài:

$\angle 1$ và $\angle 6$, cát tuyến m

($\angle 1$ và $\angle 6$ nằm giữa hai đường thẳng l và n)

Các góc đồng vị:

$\angle 1$ và $\angle 5$, cát tuyến l

$\angle 3$ và $\angle 4$, cát tuyến m

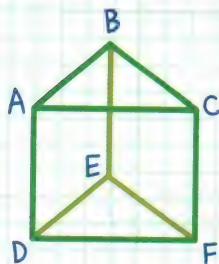
$\angle 4$ và $\angle 5$, cát tuyến n





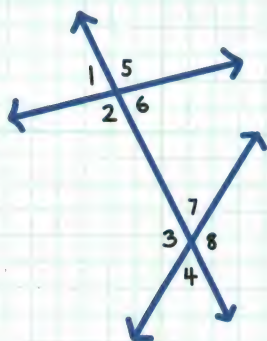
BÀI TẬP

Quan sát hình vẽ sau và làm các câu 1-3.

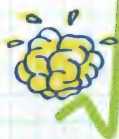


1. Viết tên hai đoạn thẳng song song với \overline{AD} .
2. Viết tên ba đoạn thẳng chéo nhau với \overline{AC} .
3. Viết tên hai mặt phẳng song song.

Quan sát hình vẽ sau và làm các câu 4-7.



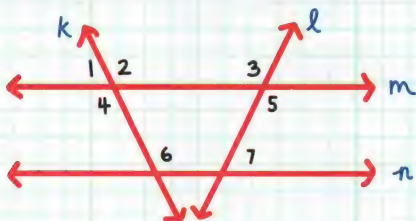
4. Viết tên tất cả các cặp góc so le trong.



BÀI TẬP

5. Viết tên tất cả các cặp góc trong cùng phía.
6. Viết tên tất cả các cặp góc so le ngoài.
7. Viết tên tất cả các cặp góc đồng vị.

Quan sát hình vẽ sau và làm các câu 8-11.



8. Viết tên cát tuyến tạo thành cặp góc $\angle 1$ và $\angle 5$, sau đó viết tên cặp góc.
9. Viết tên cát tuyến tạo thành cặp góc $\angle 5$ và $\angle 7$, sau đó viết tên cặp góc.
10. Tìm cặp góc so le trong được đánh số. Nêu tên cát tuyến tạo thành cặp góc đó.
11. Tìm tất cả các góc đồng vị được đánh số. Nêu tên cát tuyến tạo thành mỗi cặp góc.

LỜI GIẢI



1. \overline{BE} và \overline{CF}
2. \overline{BE} , \overline{DE} , và \overline{EF}
3. Mặt phẳng ABC và mặt phẳng DEF
4. $\angle 2$ và $\angle 7$, $\angle 3$ và $\angle 6$
5. $\angle 2$ và $\angle 3$, $\angle 6$ và $\angle 7$
6. $\angle 1$ và $\angle 8$, $\angle 4$ và $\angle 5$
7. $\angle 1$ và $\angle 3$, $\angle 2$ và $\angle 4$, $\angle 5$ và $\angle 7$, $\angle 6$ và $\angle 8$
8. Cắt tuyến m , các góc so le ngoài
9. Cắt tuyến l , trong cùng phía
10. $\angle 4$ và $\angle 6$, cắt tuyến k
11. $\angle 1$ và $\angle 3$, cắt tuyến m
 $\angle 2$ và $\angle 6$, cắt tuyến k
 $\angle 6$ và $\angle 7$, cắt tuyến n

Chương 8

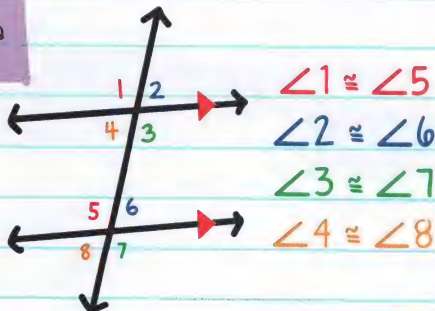
CHỨNG MINH CÁC CẶP GÓC ĐẶC BIỆT

Các cặp góc tạo bởi một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song có những tính chất đặc biệt được sử dụng để chứng minh hai đường thẳng song song.

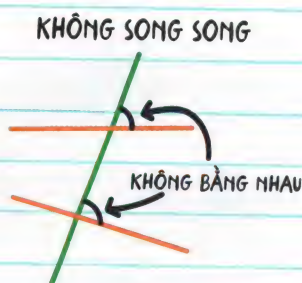
ĐỊNH LÝ CÁC GÓC TƯƠNG ỨNG

Hai đường thẳng song song cắt bởi một cát tuyến tạo thành các cặp góc đồng vị bằng nhau.

nằm cùng một phía
so với cát tuyến

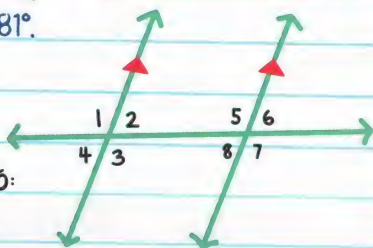


Ghi nhớ: Các đường thẳng phải song song với nhau.



VÍ DỤ: Trong hình vẽ sau đây, $m\angle 2 = 81^\circ$. Tìm tất cả các góc khác có số đo bằng 81° .

Vì các đường thẳng song song với nhau nên ta có:



Các góc đồng vị $\angle 2$ và $\angle 6$ bằng nhau, do vậy $m\angle 6 = 81^\circ$

Các góc đối đỉnh $\angle 2$ và $\angle 4$ bằng nhau, do vậy $m\angle 4 = 81^\circ$

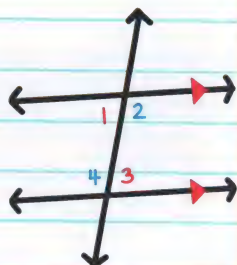
Các góc đồng vị $\angle 4$ và $\angle 8$ bằng nhau, do vậy $m\angle 8 = 81^\circ$

ĐỊNH LÝ GÓC SO LE TRONG

Nếu hai đường thẳng song song cắt bởi một cát tuyến thì sẽ tạo thành các góc so le trong bằng nhau.

$$\angle 1 \cong \angle 3$$

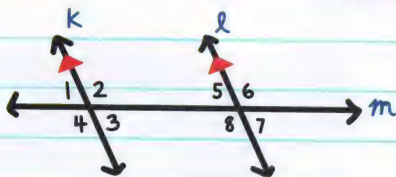
$$\angle 2 \cong \angle 4$$



VÍ DỤ:

Giả thiết: $k \parallel l$

Kết luận: $\angle 5 \cong \angle 3$



MỆNH ĐỀ

GIẢI THÍCH

1. $k \parallel l$

2. $\angle 3 \cong \angle 7$

3. $\angle 7 \cong \angle 5$

4. $\angle 3 \cong \angle 5$

5. $\angle 5 \cong \angle 3$

1. Giả thiết đã cho

2. Tiên đề góc đồng vị

3. Định nghĩa góc đối đỉnh

4. Tính chất bắc cầu của quan hệ bằng nhau

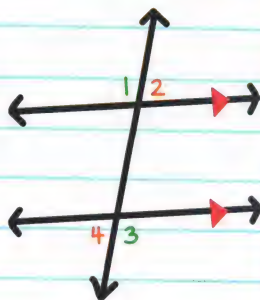
5. Tính chất đối xứng của quan hệ bằng nhau

ĐỊNH LÝ GÓC SO LE NGOÀI

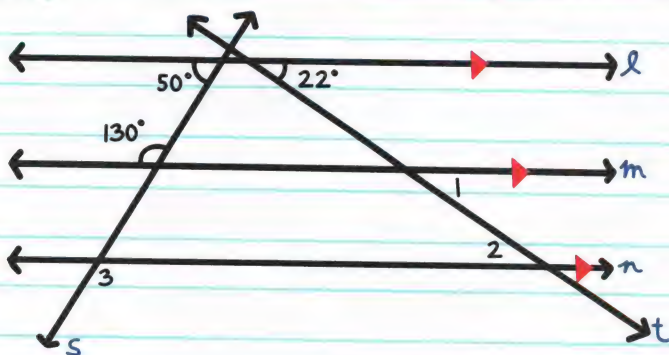
Nếu hai đường thẳng song song cắt bởi một cát tuyến thì sẽ tạo thành các góc so le ngoài bằng nhau.

$$\angle 1 \cong \angle 3$$

$$\angle 2 \cong \angle 4$$



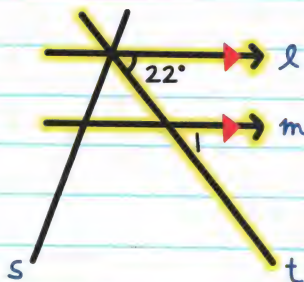
VÍ DỤ: Tìm $m\angle 1$, $m\angle 2$, và $m\angle 3$ trong hình vẽ sau đây.



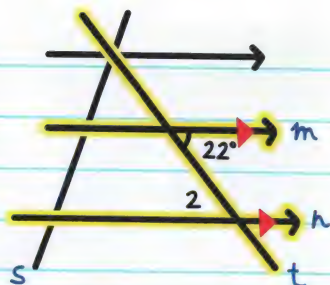
Từ **TIÊN ĐỀ GÓC ĐỒNG VỊ**

tạo ra bởi cát tuyến t cắt hai đường thẳng l và m ta suy ra

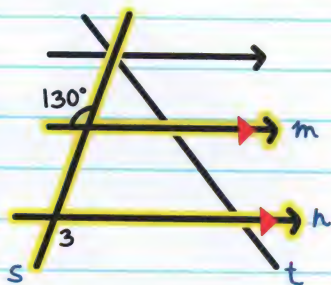
$$m\angle 1 = 22^\circ$$



TỪ ĐỊNH LÝ GÓC SO LE TRONG
tạo ra bởi cát tuyến t cắt hai
đường thẳng m và n ta suy ra
 $m\angle 2 = 22^\circ$.

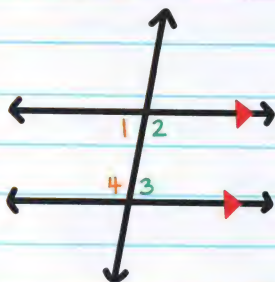


TỪ ĐỊNH LÝ GÓC SO LE TRONG
tạo ra bởi cát tuyến s cắt hai
đường thẳng m và n ta suy ra
 $m\angle 3 = 130^\circ$.



ĐỊNH LÝ GÓC TRONG CÙNG PHÍA

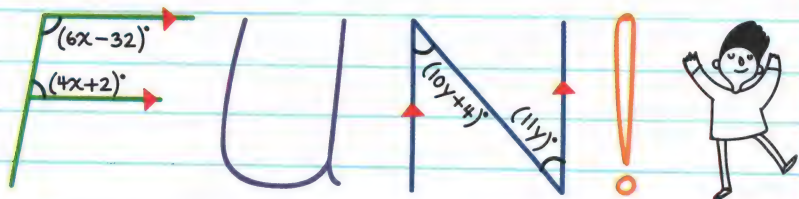
Khi hai đường thẳng song song cắt bởi một cát tuyến
thì sẽ tạo thành các góc trong cùng phía bù nhau.



$$m\angle 1 + m\angle 4 = 180^\circ$$

$$m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$$

VÍ DỤ: Tìm giá trị của x và y trong hình vẽ đã cho.



Trên chữ F, ta biết các góc được đánh dấu là các góc bù nhau (**ĐỊNH LÝ GÓC TRONG CÙNG PHÍA**). Vậy ta có:

$$6x - 32 + 4x + 2 = 180$$

$$10x - 30 = 180$$

Rút gọn lại.

$$10x = 210$$

Cộng cả hai vế với 30.

$$x = 21$$

Chia cả hai vế cho 10.

Trên chữ N, ta biết các góc được đánh dấu là các góc bằng nhau (**ĐỊNH LÝ GÓC SO LE TRONG**). Vậy ta có:

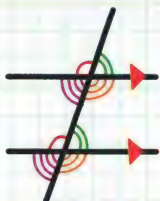
$$10y + 4 = 11y$$

$$y = 4$$

Trừ cả hai vế cho $10y$.

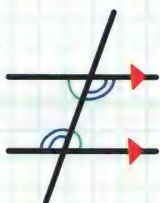
ĐỊNH LÝ VÀ TIÊN ĐỀ VỀ ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

TIÊN ĐỀ GÓC
ĐỒNG VỊ



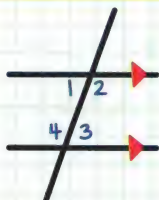
Các góc đồng vị
bằng nhau nếu
hai đường thẳng
song song

ĐỊNH LÝ GÓC
SO LẺ TRONG



Các góc so le
trong bằng
nhau nếu hai
đường thẳng
song song

ĐỊNH LÝ GÓC
TRONG CÙNG
PHÍA

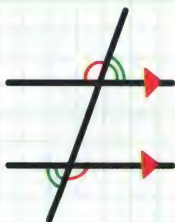


$$m\angle 1 + m\angle 4 = 180^\circ$$

$$m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$$

Các góc trong
cùng phía bù
nhau nếu hai
đường thẳng
song song

ĐỊNH LÝ GÓC
SO LẺ NGOÀI

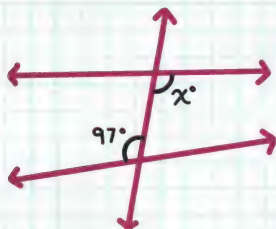


Các góc so le
ngoài bằng
nhau nếu hai
đường thẳng
song song



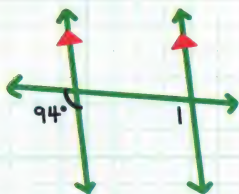
BÀI TẬP

1. Ta có thể sử dụng định lý góc so le trong để tìm giá trị của x không?

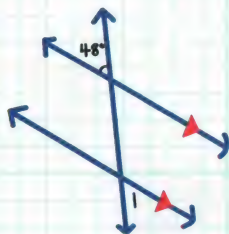


Tìm $m\angle 1$ cho các câu từ 2-5. Hãy chỉ rõ em đã sử dụng định lý hay tiên đề nào.

2.



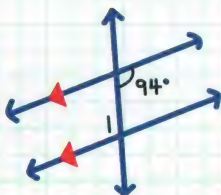
3.



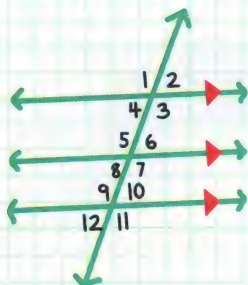
4.



5.



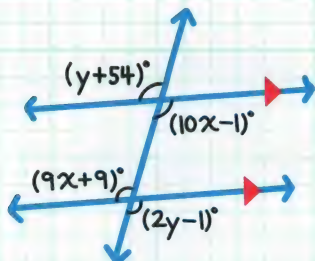
6. Trong hình vẽ bên phải cho $m\angle 11 = 103^\circ$. Viết tên tất cả các góc khác cũng có số đo 103° .





BÀI TẬP

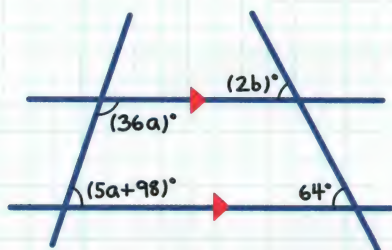
Quan sát hình vẽ sau đây rồi làm các câu hỏi 7 và 8.



7. Tìm giá trị của x . Em đã sử dụng định lý hay tiên đề nào để tìm ra kết quả?

8. Tìm giá trị của y .

Quan sát hình vẽ sau đây rồi làm các câu hỏi 9 và 10.



9. Tìm giá trị của a . Em đã sử dụng định lý hay tiên đề nào để tìm ra kết quả?

10. Tìm giá trị của b . Em đã sử dụng định lý hay tiên đề nào để tìm ra kết quả?

LỜI GIẢI



1. Không vì các đường thẳng không song song với nhau.
2. $m\angle 1 = 94^\circ$, ta sử dụng tiên đề góc đồng vị.
3. $m\angle 1 = 48^\circ$, ta sử dụng định lý góc so le ngoài.
4. $m\angle 1 = 55^\circ$, ta sử dụng định lý góc trong cùng phía.
5. $m\angle 1 = 94^\circ$, ta sử dụng định lý góc so le trong.
6. $\angle 1, \angle 3, \angle 5, \angle 7, \angle 9$
7. $x = 10$, ta sử dụng định lý góc so le trong.
8. $y = 55$
9. $a = 2$, ta sử dụng định lý góc trong cùng phía.
10. $b = 32$, ta sử dụng tiên đề góc đồng vị.

Chương 9

CHỨNG MINH CÁC ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Định lý đảo của các định lý và tiên đề về hai đường thẳng song song cũng đúng.

ĐỊNH LÝ ĐẢO CỦA TIÊN ĐỀ
GÓC ĐỒNG VỊ

Nếu các góc đồng vị **BẰNG NHAU** thì hai đường thẳng **SONG SONG**

ĐỊNH LÝ ĐẢO CỦA ĐỊNH
LÝ GÓC SO LE TRONG

Nếu các góc so le trong **BẰNG NHAU** thì hai đường thẳng **SONG SONG**

ĐỊNH LÝ ĐẢO CỦA ĐỊNH
LÝ GÓC TRONG CÙNG PHÍA

Nếu các góc trong cùng phía **BÙ NHAU** thì hai đường thẳng **SONG SONG**

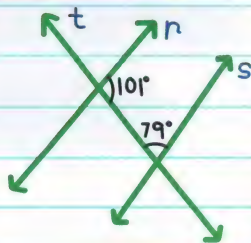
ĐỊNH LÝ ĐẢO CỦA ĐỊNH
LÝ GÓC SO LE NGOÀI

Nếu các góc so le ngoài **BẰNG NHAU** thì hai đường thẳng **SONG SONG**

Sử dụng các định lý cho trước để xác định các đường thẳng có song song với nhau không:

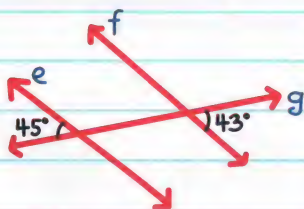
ĐỊNH LÝ ĐẢO CỦA ĐỊNH LÝ GÓC TRONG CÙNG PHÍA

Các góc trong cùng phía bù nhau ($101^\circ + 79^\circ = 180^\circ$) nên các đường thẳng r và s song song với nhau.



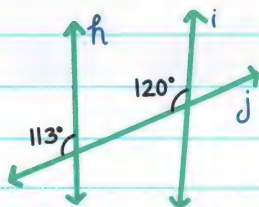
ĐỊNH LÝ ĐẢO CỦA ĐỊNH LÝ GÓC SO LE NGOÀI

Các góc so le ngoài không bằng nhau nên các đường thẳng e và f không song song với nhau.



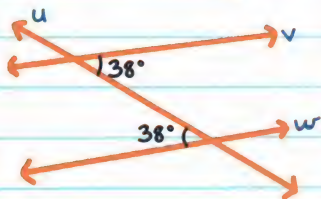
PHẦN ĐẢO CỦA TIỀN ĐỂ GÓC ĐỒNG VỊ

Các góc đồng vị không bằng nhau nên các đường thẳng h và i không song song với nhau.



ĐỊNH LÝ ĐẢO CỦA ĐỊNH LÝ GÓC SO LE TRONG

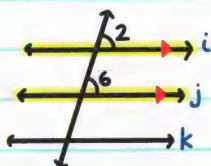
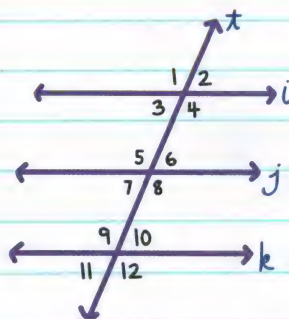
Các góc so le trong bằng nhau nên các đường thẳng v và w song song với nhau.



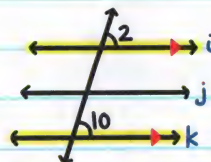
VÍ DỤ: Nếu $i \parallel j$ và $i \parallel k$,
hãy chứng minh $j \parallel k$.

Giả thiết: $i \parallel j$, $i \parallel k$

Kết luận: $j \parallel k$



$i \parallel j$ nên
 $\angle 2 \cong \angle 6$



$i \parallel k$ nên
 $\angle 2 \cong \angle 10$

$\angle 6 \cong \angle 10$

MỆNH ĐỀ

GIẢI THÍCH

1. $i \parallel j, i \parallel k$

1. Giả thiết đã cho

2. $\angle 2 \cong \angle 6$

2. Tiên đề góc đồng vị

3. $\angle 2 \cong \angle 10$

3. Tiên đề góc đồng vị

4. $\angle 6 \cong \angle 10$

4. Tính chất bắc cầu của quan hệ bằng nhau

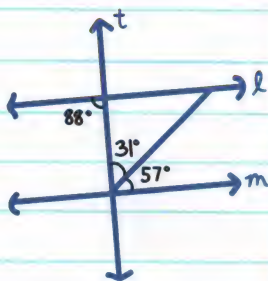
5. $j \parallel k$

5 Định lý đảo của tiên đề góc đồng vị

VÍ DỤ: Đường thẳng l có song song với đường thẳng m không?

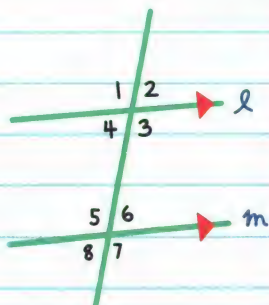
Vì $31^\circ + 57^\circ = 88^\circ$, nên các góc so le trong bằng nhau.

Theo ĐỊNH LÝ ĐẢO CỦA ĐỊNH LÝ GÓC SO LE TRONG ta suy ra l song song với m



VÍ DỤ:

Hãy chứng minh rằng nếu
 $m\angle 2 + m\angle 7 = 180^\circ$, thì $\ell \parallel m$.



Giả thiết: $m\angle 2 + m\angle 7 = 180^\circ$

Kết luận: $\ell \parallel m$

Giả thiết đã cho: $m\angle 2 + m\angle 7 = 180^\circ$. Vì các góc đối đỉnh có số đo bằng nhau nên $m\angle 2 = m\angle 4$ và $m\angle 7 = m\angle 5$. Thay thế hai giá trị này vào biểu thức giả thiết đã cho ta được $m\angle 4 + m\angle 5 = 180^\circ$.

Theo ĐỊNH LÝ ĐẢO CỦA ĐỊNH LÝ GÓC TRONG CÙNG PHÍA ta suy ra $\ell \parallel m$.





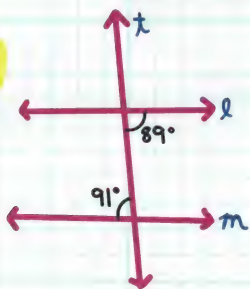
BÀI TẬP

Điền vào chỗ trống trong các câu sau:

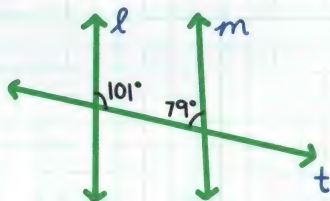
1. Nếu các góc so le trong bằng nhau thì hai đường thẳng _____.
2. Nếu các góc trong cùng phía _____, thì hai đường thẳng song song với nhau.

Từ câu 3-6, hãy cho biết các đường thẳng l và m có song song với nhau không, chỉ rõ tại sao.

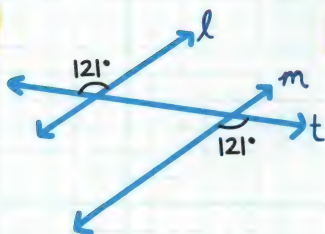
3.



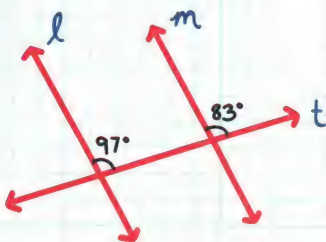
4.



5.



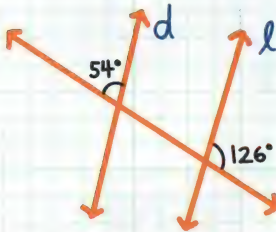
6.



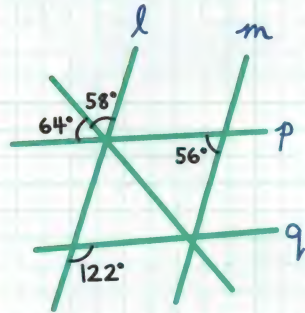


BÀI TẬP

7. d và l có song song với nhau không?



8. Các đường thẳng nào sau đây song song với nhau? Giải thích tại sao.

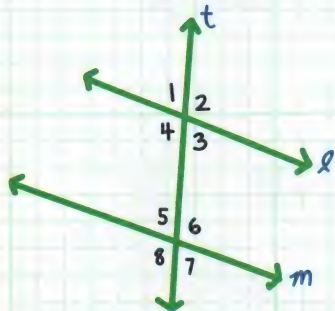


9. Điền vào chỗ trống trong phần chứng minh bằng đoạn văn sau để chứng tỏ nếu $m\angle 1 + m\angle 6 = 180^\circ$, thì $l \parallel m$.

Theo giả thiết ta có
 $m\angle 1 + m\angle 6 = 180^\circ$. Vì

_____ có số đo bằng
nhau nên $m\angle 1 = m\angle 3$.

Thay thế biểu thức này vào
phương trình đã cho ta
được _____. Theo _____, $l \parallel m$.

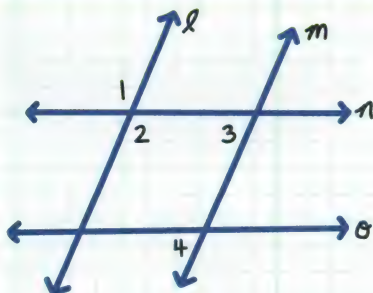




BÀI TẬP

10. Hoàn thành các mệnh đề và giải thích cho phần chứng minh sau đây.

Giả thiết: $n \parallel o$,
 $m\angle 1 + m\angle 4 = 180^\circ$
Kết luận: $\ell \parallel m$



MỆNH ĐỀ

GIẢI THÍCH

1. $n \parallel o$,
 $m\angle 1 + m\angle 4 = 180^\circ$

1. Giả thiết đã cho

2. $\angle 3 \cong \angle 4$

2. _____

3. $m\angle 3 = m\angle 4$

3. Định nghĩa góc bằng nhau

4. _____

4. Định nghĩa góc đối đỉnh

5. $m\angle 1 = m\angle 2$

5. _____

6. $m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$

6. Thay thế

7. $\ell \parallel m$

7. _____

LỜI GIẢI



1. song song

2. bù nhau

3. Không, các góc so le trong không bằng nhau.

4. Có, theo định lý đảo của định lý góc trong cùng phía.

5. Có, theo định lý đảo của định lý góc so le ngoài.

6. Không, các góc đồng vị không bằng nhau.

7. Có. (Vì $180^\circ - 126^\circ = 54^\circ$ nên $d \parallel e$ theo phần đảo của tiên đề góc đồng vị hoặc theo định lý đảo của định lý góc so le ngoài).

8. p song song với q . Vì $64^\circ + 58^\circ = 122^\circ$, $p \parallel q$ theo định lý đảo của định lý góc so le ngoài (cắt bởi cát tuyến ℓ).

9. Theo giả thiết ta có $m\angle 1 + m\angle 6 = 180^\circ$. Vì các góc đối đỉnh có số đo bằng nhau nên $m\angle 1 = m\angle 3$. Thay thế biểu thức này vào phương trình đã cho ta được $m\angle 3 + m\angle 6 = 180^\circ$. Theo định lý đảo của định lý góc trong cùng phía ta suy ra $\ell \parallel m$

10.

MỆNH ĐỀ

GIẢI THÍCH

1. $n \parallel a$

$m\angle 1 + m\angle 4 = 180^\circ$

1. Giả thiết đã cho

2. $\angle 3 \cong \angle 4$

2. Tiên đề góc đồng vị

3. $m\angle 3 = m\angle 4$

3. Định nghĩa góc bằng nhau

4. $\angle 1 \cong \angle 2$

4. Định nghĩa góc đối đỉnh

5. $m\angle 1 = m\angle 2$

5. Định nghĩa góc bằng nhau

6. $m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$

6. Thay thế

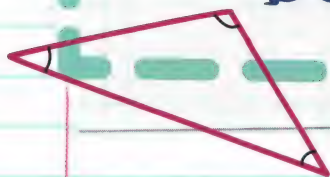
7. $\ell \parallel m$

7. Định lý đảo của định lý góc trong cùng phía

BÀI 3



Tam giác và
tam giác
bằng nhau



Chương 10

CÁC LOẠI TAM GIÁC TRONG HÌNH HỌC

ĐA GIÁC là một hình đóng **HAI CHIỀU** (hình phẳng) có ít nhất ba cạnh thẳng.

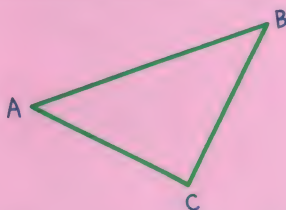
TAM GIÁC là một đa giác có ba cạnh và ba góc. Ký hiệu của tam giác là Δ .

Để gọi tên tam giác, ta viết ký hiệu Δ ... trước sau đó viết các chữ cái ký hiệu cho ba đỉnh.

Tam giác: ΔABC

Cạnh: \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{BC}

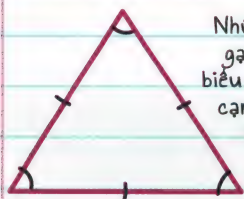
Đỉnh: A, B, C



PHÂN LOẠI TAM GIÁC

Ta có thể **PHÂN LOẠI** (hoặc sắp xếp thành nhóm) các tam giác theo các cạnh:

TAM GIÁC ĐỀU

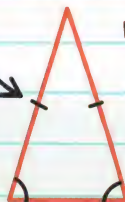


3 cạnh bằng nhau

3 góc bằng nhau

Những dấu gạch này biểu diễn các cạnh bằng nhau

TAM GIÁC CÂN

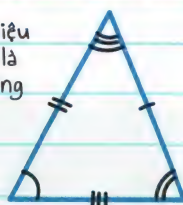


2 cạnh bằng nhau

2 góc bằng nhau

Những ký hiệu này nghĩa là các góc bằng nhau

TAM GIÁC THƯỜNG

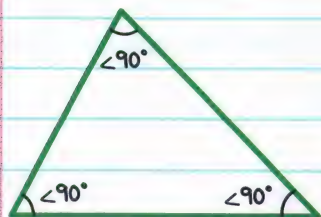


0 cạnh bằng nhau

0 góc bằng nhau

Ta cũng có thể phân loại các tam giác theo các góc:

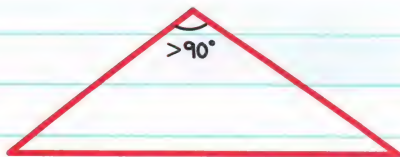
TAM GIÁC NHỌN



3 góc nhọn

(tất cả các góc đều $< 90^\circ$)

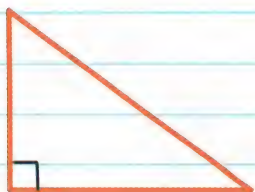
TAM GIÁC TÙ



1 góc tù

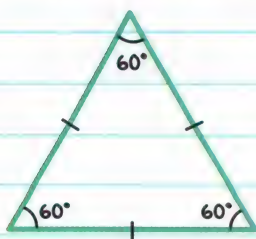
(một góc $> 90^\circ$)

TAM GIÁC VUÔNG



1 góc vuông (90°)

TAM GIÁC ĐỀU



3 góc bằng nhau

Nếu một tam giác là tam giác đều thì nó là đẳng giác.

Nếu một tam giác là đẳng giác thì nó là tam giác đều.

Nếu một tam giác là tam giác đều thì nó có ba góc 60° .

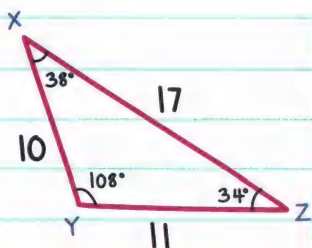
Ta có thể kết hợp cả hai cách phân loại để mô tả một tam giác chính xác hơn.

VÍ DỤ: Phân loại tam giác đã cho.

GÓC: Có một góc tù.

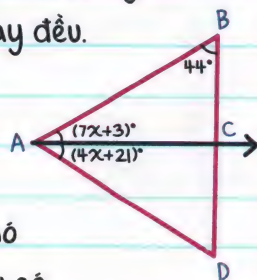
CẠNH: Không có cạnh bằng nhau.

LOẠI: Tam giác thường và tù.



VÍ DỤ: Cho \overrightarrow{AC} là phân giác của $\angle BAD$. Hãy cho biết $\triangle ABD$ là tam giác nhọn, tù, vuông hay đều.

Bước 1: Tìm giá trị của x .



Vì \overrightarrow{AC} là phân giác của $\angle BAD$ nên nó chia $\angle BAD$ thành hai góc bằng nhau có số đo bằng nhau. Ta có:

$$m\angle BAC = m\angle CAD$$

$$7x + 3 = 4x + 21$$

Thay thế.

$$3x + 3 = 21$$

Trừ cả hai vế cho $4x$.

$$3x = 18$$

Trừ cả hai vế cho 3.

$$x = 6$$

Chia cả hai vế cho 3.

Bước 2: Tìm $m\angle BAC$, $m\angle CAD$, và $m\angle BAD$

$$m\angle BAC = (7x + 3)^\circ = [7(6) + 3]^\circ = 45^\circ$$

$$m\angle CAD = (4x + 21)^\circ = [4(6) + 21]^\circ = 45^\circ$$

$$m\angle BAD = m\angle BAC + m\angle CAD$$

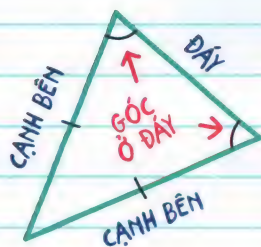
$$= 45^\circ + 45^\circ$$

$$= 90^\circ$$

Vì $\angle BAD$ có số đo bằng 90° , nên nó là góc vuông, vậy $\triangle ABD$ là tam giác vuông.

Tam giác cân

Trong một TAM GIÁC CÂN, các cạnh có độ dài bằng nhau gọi là CẠNH BÊN. Cạnh thứ ba gọi là CẠNH ĐÁY. Các góc đối diện với cạnh bên gọi là GÓC Ở ĐÁY.

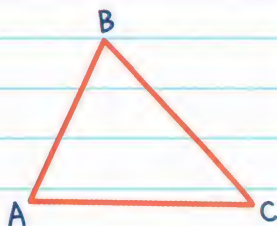


Trong tam giác cân này:

$\angle A$ đối diện với cạnh \overline{BC} .

$\angle B$ đối diện với cạnh \overline{AC} .

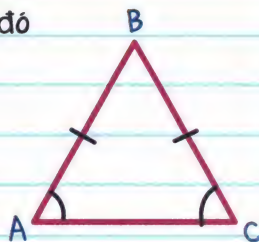
$\angle C$ đối diện với cạnh \overline{AB} .



ĐỊNH LÝ TAM GIÁC CÂN

Nếu hai cạnh của một tam giác bằng nhau thì các góc đối của hai cạnh đó cũng bằng nhau.

Nếu $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, thì $\angle A \cong \angle C$.

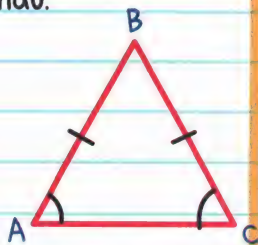


Định lý đảo của định lý này cũng đúng.

ĐỊNH LÝ ĐẢO CỦA ĐỊNH LÝ TAM GIÁC CÂN

Nếu hai cạnh của một tam giác bằng nhau thì các góc đối của hai cạnh đó cũng bằng nhau.

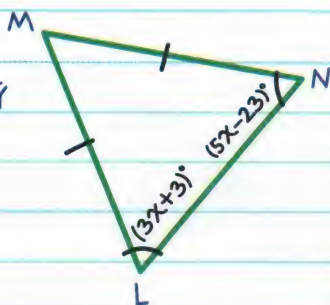
Nếu $\angle A \cong \angle C$, thì $\overline{AB} \cong \overline{BC}$.



VÍ DỤ: Tìm giá trị của x trong $\triangle LMN$.

Vì $\overline{LM} \cong \overline{MN}$, ta suy ra
 $\angle L$ bằng với $\angle N$ (theo ĐỊNH LÝ
TAM GIÁC CÂN).

$$m\angle L = m\angle N$$



$$3x + 3 = 5x - 23$$

$$3 = 2x - 23$$

$$26 = 2x$$

$$x = 13$$

Thay thế.

Trừ cả hai vế cho $3x$.

Cộng cả hai vế với 23 .

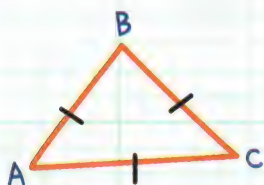
Chia cả hai vế cho 2 .



BÀI TẬP

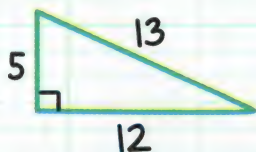
Hoàn thành các mệnh đề sau:

1. Một tam giác cân có _____ cạnh bằng nhau.
2. Một tam giác thường có _____ cạnh bằng nhau.
3. Một tam giác nhọn có _____ góc nhọn.
4. Số đo của $\angle A$ là _____ $^\circ$.

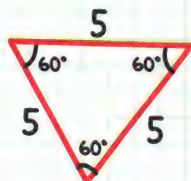


Từ câu 5-7 hãy phân loại mỗi tam giác theo số đo cạnh và góc.

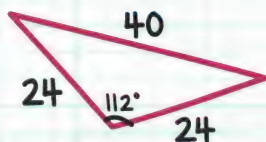
5.



6.



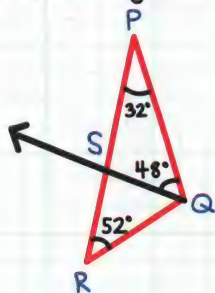
7.



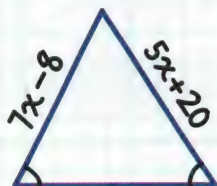


BÀI TẬP

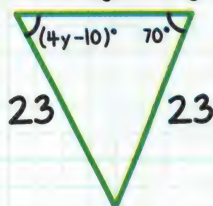
8. Cho \overline{QS} là phân giác góc $\angle PQR$. Hãy cho biết $\triangle PQR$ là tam giác nhọn, tù hay vuông.



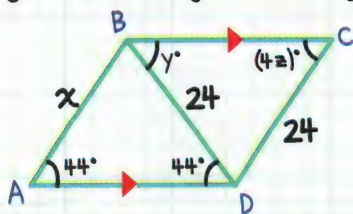
9. Tìm giá trị của x trong tam giác dưới đây.



10. Tìm giá trị của y trong tam giác dưới đây.



11. Tìm giá trị của x , y và z trong hình vẽ dưới đây.



LỜI GIẢI



1. hai

2. không

3. ba

4. 60

5. vuông thường

6. tam giác nhọn, đẳng giác và tam giác đều

7. cân tù

8. tù

9. $7x - 8 = 5x + 20$; vậy $x = 14$

10. $70 = 4y - 10$, vậy $y = 20$

11. $x = 24$, $y = 44$, $z = 11$

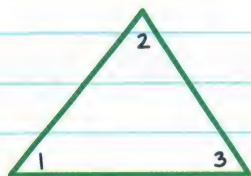
Chương 11

GÓC TRONG VÀ GÓC NGOÀI CỦA TAM GIÁC

GÓC TRONG

Các góc nằm trong một tam giác gọi là **GÓC TRONG**.

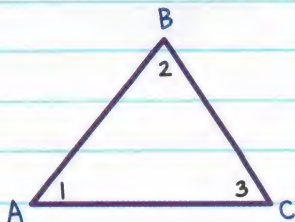
Các góc trong: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$



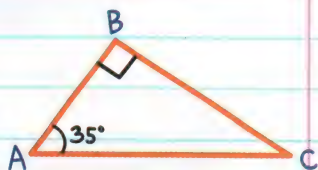
ĐỊNH LÝ TỔNG CÁC GÓC TRONG TAM GIÁC

Tổng số đo ba góc trong của tam giác bằng 180° .

$$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$$



VÍ DỤ: Tìm $m\angle C$ trong $\triangle ABC$.



$\angle B$ là góc vuông nên $m\angle B = 90^\circ$.

Từ **ĐỊNH LÝ TỔNG CÁC GÓC TRONG TAM GIÁC**, ta có số đo của các góc trong một tam giác cộng lại bằng 180° , vậy ta có:

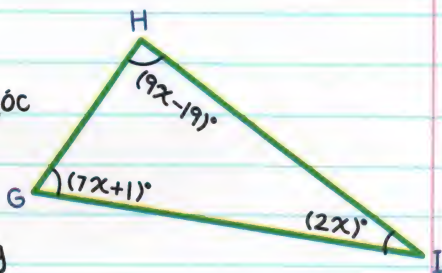
$$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$$

$$35^\circ + 90^\circ + m\angle C = 180^\circ$$

$$125^\circ + m\angle C = 180^\circ$$

$$m\angle C = 55^\circ$$

VÍ DỤ: Tìm số đo mỗi góc của $\triangle GHI$.



Số đo của cả ba góc trong cộng lại bằng 180° , vậy ta có:

$$m\angle G + m\angle H + m\angle I = 180^\circ$$

$$(7x + 1) + (9x - 19) + 2x = 180$$

$$18x - 18 = 180$$

$$18x = 198$$

$$x = 11$$

Thay thế $x = 11$ vào mỗi số đo góc ta được:

$$m\angle G = (7x + 1)^\circ = [7(11) + 1]^\circ = 78^\circ$$

$$m\angle H = (9x - 19)^\circ = [9(11) - 19]^\circ = 80^\circ$$

$$m\angle I = (2x)^\circ = 2(11)^\circ = 22^\circ$$

THỬ LẠI

$$m\angle G + m\angle H + m\angle I = 78^\circ + 80^\circ + 22^\circ = 180^\circ \checkmark$$

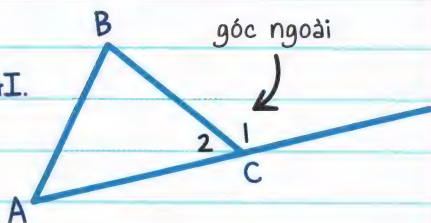


TÔI CHỈ THÍCH
TÍNH ĐÚNG.

GÓC NGOÀI

Các góc nằm phía ngoài tam giác gọi là **GÓC NGOÀI**.

$\angle 1$ là một góc ngoài của $\triangle ABC$.



$\angle 1$ và $\angle 2$ là hai góc bù nhau.

$$m\angle 1 + m\angle 2 = 180^\circ$$

VÍ DỤ: Biết trong $\triangle PQR$,

$m\angle Q = 45^\circ$ và $m\angle R = 85^\circ$. Hãy tìm $m\angle 1$.

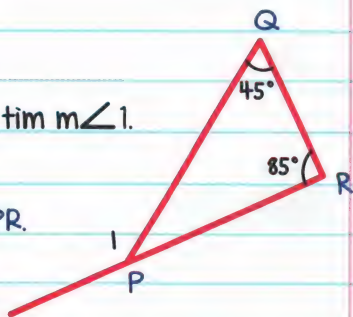
Đầu tiên, ta tìm số đo của $\angle QPR$.

Cả ba góc trong cộng lại bằng 180° nên ta có:

$$m\angle QPR + m\angle Q + m\angle R = 180^\circ$$

$$m\angle QPR + 45^\circ + 85^\circ = 180^\circ$$

$$m\angle QPR = 50^\circ$$



Bây giờ ta sẽ sử dụng kết quả vừa tính được để tìm $m\angle 1$.
 $\angle 1$ và $\angle QPR$ bù nhau nên:

$$m\angle 1 + m\angle QPR = 180^\circ$$

$$m\angle 1 + 50^\circ = 180^\circ$$

$$m\angle 1 = 130^\circ$$



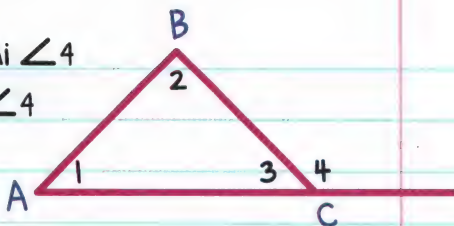
Số đo của một góc ngoài bằng tổng số đo hai góc trong không kề với nó.

$$m\angle 1 = m\angle 2 + m\angle 3$$



Giả thiết: $\triangle ABC$ có góc ngoài $\angle 4$

Kết luận: $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 4$



$\triangle ABC$ có góc ngoài $\angle 4$

Giả thiết đã cho

$$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$$

Định lý tổng các góc
trong tam giác

$$m\angle 3 + m\angle 4 = 180^\circ$$

Định nghĩa góc kề bù

$$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = m\angle 3 + m\angle 4$$

Thay thế

$$m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 4$$

Tính chất trừ của đẳng thức

VÍ DỤ: Tìm $m\angle 1$.

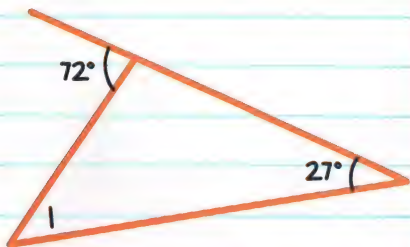
Vì 72° cũng bằng giá trị
tổng của $m\angle 1$ và 27° ,

$$72^\circ = m\angle 1 + 27^\circ$$

$$72^\circ - 27^\circ = m\angle 1 + 27^\circ - 27^\circ$$

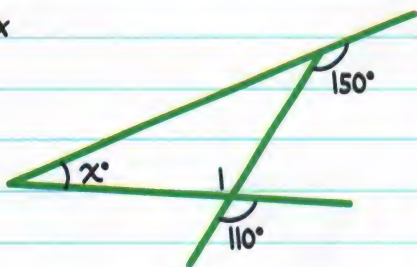
$$45^\circ = m\angle 1$$

$$m\angle 1 = 45^\circ$$



VÍ DỤ: Tìm giá trị của x trong hình vẽ đã cho.

Vì các góc đối đỉnh bằng nhau nên ta có:



$$m\angle 1 = 110^\circ$$

Vì 150° cũng bằng giá trị tổng của $m\angle 1$ và x° nên ta có:

$$150 = m\angle 1 + x$$

$$150 = 110 + x$$

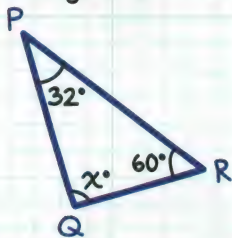
$$x = 40$$



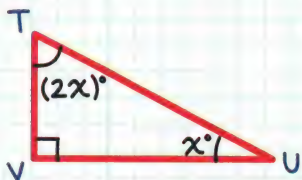


BÀI TẬP

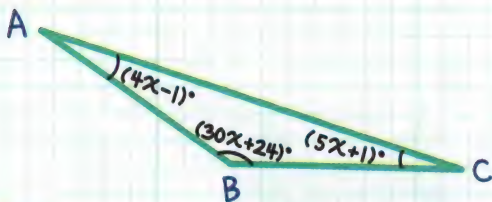
1. Tìm giá trị của x trong $\triangle PQR$.



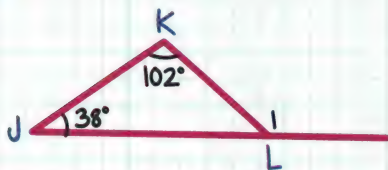
2. Tìm giá trị của x trong $\triangle TUV$.



3. Tìm các số đo của $\angle A$, $\angle B$, và $\angle C$.

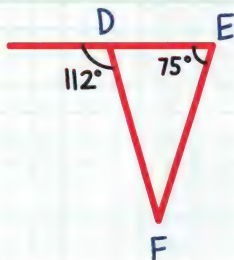


4. Tìm $m\angle 1$ trong $\triangle JKL$.

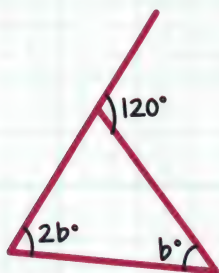


BÀI TẬP

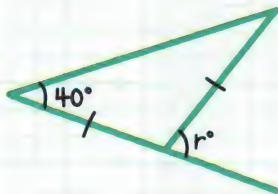
5. Tìm $m\angle F$ trong $\triangle DEF$.



6. Tìm giá trị của b trong hình vẽ sau đây.



7. Tìm giá trị của r trong hình vẽ sau đây.



LỜI GIẢI



1. $32 + 60 + x = 180$ nên $x = 88^\circ$

2. $2x + x + 90 = 180$ nên $x = 30^\circ$

3. $(4x - 1) + (30x + 24) + (5x + 1) = 180$;
do đó $m\angle A = 15^\circ$, $m\angle B = 144^\circ$, $m\angle C = 21^\circ$

4. $38 + 102 = m\angle 1$ nên $m\angle 1 = 140^\circ$

5. $112 = 75 + m\angle F$ nên $m\angle F = 37^\circ$

6. $120 = 2b + b$ nên $b = 40^\circ$

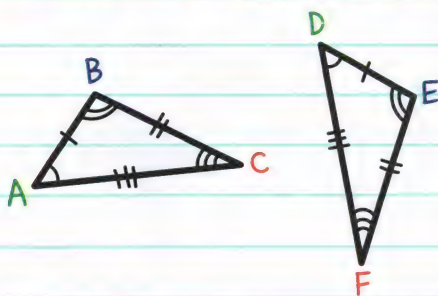
7. $40 + 40 = r$ nên $r = 80^\circ$

Chương 12

TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CẠNH - CẠNH - CẠNH VÀ CẠNH - GÓC - CẠNH

BẰNG NHAU

Đa giác bằng nhau có hình dạng và kích cỡ giống hệt nhau. Các **CÁC GÓC TƯƠNG ỨNG** (góc tại cùng vị trí tương ứng trong mỗi hình) và các **CẠNH TƯƠNG ỨNG** bằng nhau.



Nếu $\triangle ABC$ và $\triangle DEF$ bằng nhau thì các góc tương ứng bằng nhau:

$$\angle A \cong \angle D$$

$$\angle B \cong \angle E$$

$$\angle C \cong \angle F$$

Và các cạnh tương ứng bằng nhau:

$$\overline{AB} \cong \overline{DE}$$

$$\overline{BC} \cong \overline{EF}$$

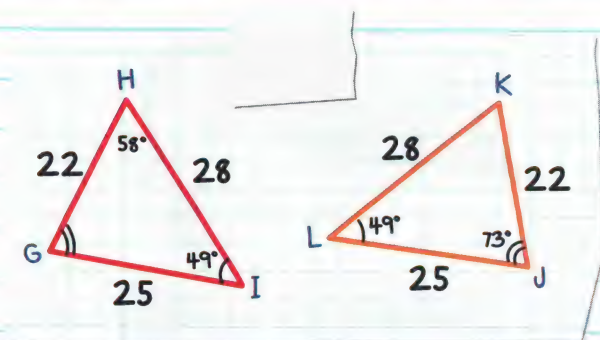
$$\overline{AC} \cong \overline{DF}$$

Mệnh đề bằng nhau được viết là $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

GHI NHỚ: Các góc tương ứng bằng nhau phải được viết theo cùng thứ tự. Ví dụ khi ta viết $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ nghĩa là $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, và $\angle C \cong \angle F$. Ta không thể viết $\triangle ABC \cong \triangle EFD$ vì $\angle A$ không bằng $\angle E$.

VÍ DỤ: Hãy cho biết $\triangle GHI$ có bằng $\triangle JKL$ không? Nếu có, hãy viết mệnh đề bằng nhau.

Ta tìm các góc chưa biết.



Theo ĐỊNH LÝ TỔNG CÁC GÓC TRONG TAM GIÁC ta có:

$$m\angle G + m\angle H + m\angle I = 180^\circ$$

$$m\angle G + 58^\circ + 49^\circ = 180^\circ$$

$$m\angle G = 73^\circ$$

Tương tự ta cũng có: $m\angle J + m\angle K + m\angle L = 180^\circ$

$$73^\circ + m\angle K + 49^\circ = 180^\circ$$

$$m\angle K = 58^\circ$$

Các tam giác bằng nhau vì chúng có các góc bằng nhau:

$$\angle G \cong \angle J$$

$$\angle H \cong \angle K$$

$$\angle I \cong \angle L$$

và các cạnh tương ứng bằng nhau:

$$\overline{GH} \cong \overline{JK}$$

$$\overline{HI} \cong \overline{KL}$$

$$\overline{GI} \cong \overline{JL}$$

Mệnh đề bằng nhau là: $\triangle GHI \cong \triangle JKL$.



HOÀN HẢO
HẾT MỨC

TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CẠNH - CẠNH - CẠNH (C.C.C)

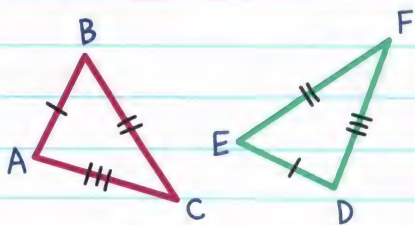
TIỀN ĐỀ BẰNG NHAU CẠNH - CẠNH - CẠNH (C.C.C)

Nếu ba cạnh của một tam giác bằng với ba cạnh của một tam giác khác thì hai tam giác đó bằng nhau.

Ta biết rằng nếu các cạnh tương ứng bằng nhau thì các góc cũng bằng nhau.

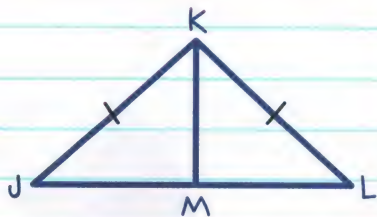
Nếu $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ và $\overline{AC} \cong \overline{DF}$

Thì $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



Trong tam giác này,
 \overline{KM} chia đôi \overline{JL} và $\overline{JK} \cong \overline{KL}$.

Hãy cho biết $\triangle JKM$
có bằng $\triangle LKM$.



Vì \overline{KM} chia đôi \overline{JL} , $\overline{JM} \cong \overline{ML}$ nên ta có:

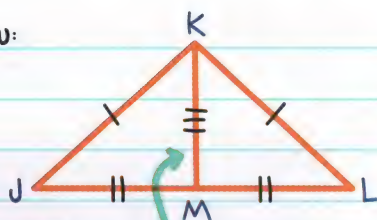
Các cạnh tương ứng bằng nhau:

$$\overline{JK} \cong \overline{KL}$$

$$\overline{JM} \cong \overline{ML}$$

$$\overline{KM} \cong \overline{KM}$$

đoạn thẳng bất kỳ
luôn bằng với chính nó

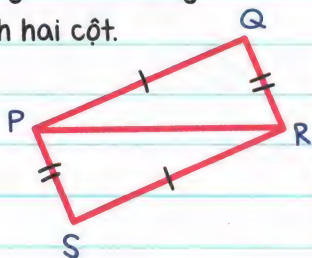


Do đó ta có $\triangle JKM \cong \triangle LKM$.

VÍ DỤ: Hãy chứng minh hai tam giác sau bằng nhau theo phương pháp chứng minh hai cột.

Giả thiết: $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$ và $\overline{QR} \cong \overline{SP}$

Kết luận: $\triangle PQR \cong \triangle RSP$



MỆNH ĐỀ

GIẢI THÍCH

1. $\overline{PQ} \cong \overline{RS}, \overline{QR} \cong \overline{SP}$

1. Giả thiết đã cho.

2. $\overline{PR} \cong \overline{PR}$

2. Tính chất phản xạ của quan hệ bằng nhau

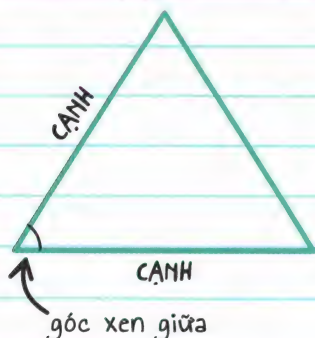
3. $\triangle PQR \cong \triangle RSP$

3. Tiên đề bằng nhau cạnh - cạnh - cạnh

TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CẠNH - GÓC - CẠNH (C.G.C)

TIỀN ĐỀ BẰNG NHAU CẠNH - GÓC - CẠNH (C.G.C)

Nếu hai cạnh và **GÓC XEN GIỮA** của một tam giác bằng với hai cạnh và góc xen giữa của một tam giác khác thì hai tam giác đó bằng nhau.

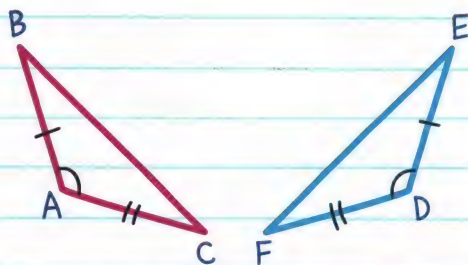


GÓC XEN GIỮA

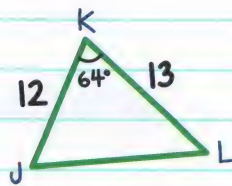
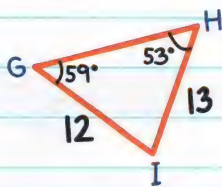
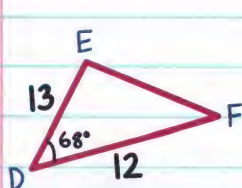
góc giữa hai cạnh
của một tam giác.

Nếu $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\angle A \cong \angle D$,
và $\overline{AC} \cong \overline{DF}$

Thì $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



VÍ DỤ: Các tam giác nào sau đây bằng nhau theo trường hợp cạnh - góc - cạnh?



Mỗi tam giác đều có hai cạnh có độ dài lần lượt là 12 và 13. Nếu góc xen giữa bằng nhau thì hai tam giác bằng nhau.

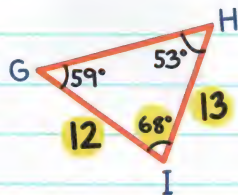
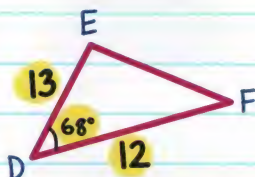
Đầu tiên, ta tìm góc xen giữa chưa biết ở tam giác thứ hai:

Vì tổng số đo các góc trong tam giác cộng lại bằng 180° nên ta có:

$$m\angle G + m\angle H + m\angle I = 180^\circ$$

$$59^\circ + 53^\circ + m\angle I = 180^\circ$$

$$m\angle I = 68^\circ$$



$\triangle JKL$ không bằng hai tam giác kia vì góc xen giữa $\angle K$ không bằng với $\angle I$ hoặc $\angle D$ ($m\angle K = 64^\circ$).

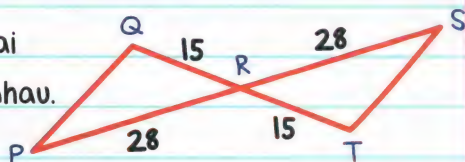
Các cạnh tương ứng: $\overline{DE} \cong \overline{HI}$ và $\overline{DF} \cong \overline{GI}$

Góc xen giữa: $\angle D \cong \angle I$

Như vậy theo TIÊN ĐỀ BẰNG NHAU C.G.C ta có:

$$\triangle DEF \cong \triangle IHG$$

VÍ DỤ: Chứng minh hai tam giác đã cho bằng nhau.



Giả thiết: $QR = 15$ và $RT = 15$

$PR = 28$ và $RS = 28$

Kết luận: $\triangle PQR \cong \triangle STR$

$$QR = 15$$

Giả thiết
đã cho

$$RT = 15$$

Giả thiết
đã cho

$$PR = 28$$

Giả thiết
đã cho

$$RS = 28$$

Giả thiết
đã cho

$$\overline{QR} \cong \overline{RT}$$

Định nghĩa đoạn
thẳng bằng nhau

$$\overline{PR} \cong \overline{RS}$$

Định nghĩa đoạn
thẳng bằng nhau

$$\angle QRP \cong \angle TRS$$

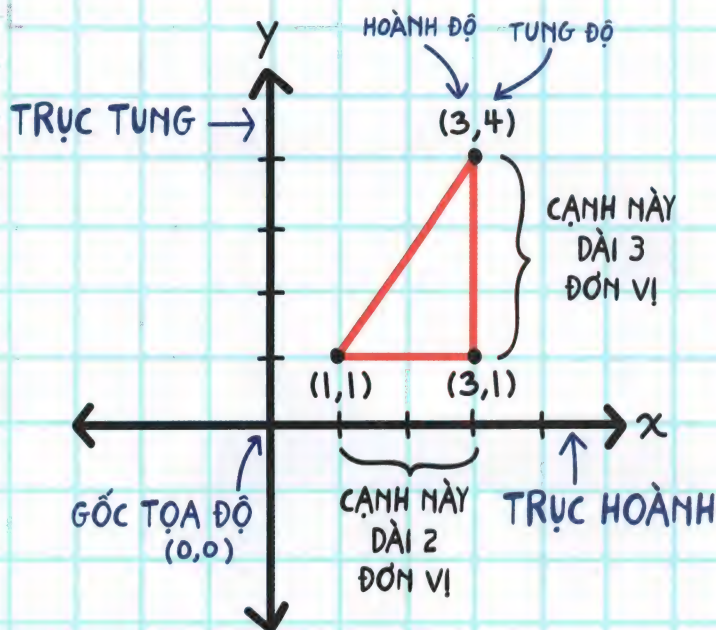
Định nghĩa
góc đối đỉnh

$$\triangle PQR \cong \triangle STR$$

Tiên đề bằng nhau C.G.C

Ta cũng có thể giải các bài toán về tam giác (và các hình khác) trên một mặt phẳng tọa độ.

Một tam giác được tạo thành bởi ba điểm trên mặt phẳng tọa độ. Các điểm là các đỉnh của tam giác. Nếu một đoạn thẳng trên mặt phẳng tọa độ nằm ngang hay thẳng đứng, ta có thể đếm các hình vuông để tìm ra độ dài của nó theo đơn vị đã quy ước.

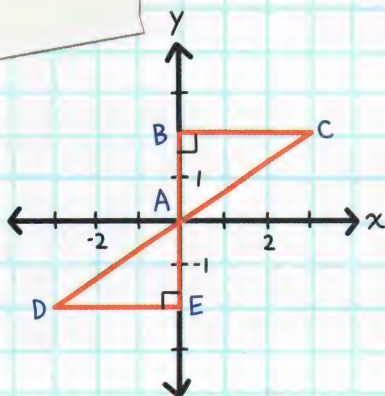


VÍ DỤ:

Hãy cho biết hai tam giác đã cho có bằng nhau không?

Các cạnh tương ứng:

Vì $AB = 2$ đơn vị và
 $AE = 2$ đơn vị



$$\overline{AB} \cong \overline{AE}$$

Vì $BC = 3$ đơn vị và $DE = 3$ đơn vị nên ta có:

$$\overline{DE} \cong \overline{BC}$$

Góc xen giữa:

$m\angle DEA = 90^\circ$ và $m\angle CBA = 90^\circ$ nên ta có:

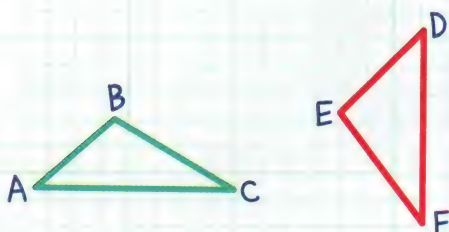
$$\angle DEA \cong \angle CBA$$

Như vậy theo **TIÊN ĐỀ BẰNG NHAU CẠNH - GÓC - CẠNH** ta có $\triangle DEA \cong \triangle CBA$.



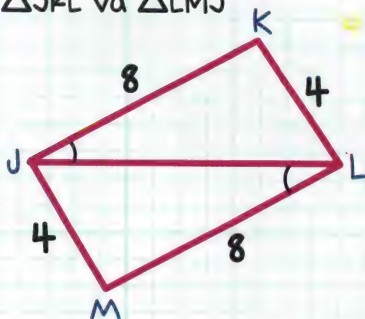
BÀI TẬP

1. Cho $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, hãy chỉ rõ các cạnh và các góc tương ứng bằng nhau.



Từ câu 2-4, hãy cho biết các tam giác đã cho có bằng nhau không. Nếu có, viết mệnh đề bằng nhau và chỉ rõ tiên đề (C.C.C hoặc C.G.C) chứng minh kết luận của em.

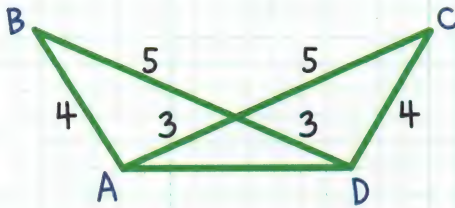
2. $\triangle JKL$ và $\triangle LMJ$





BÀI TẬP

3. $\triangle ABD$ và $\triangle DCA$



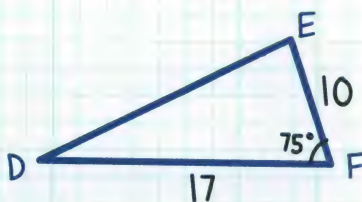
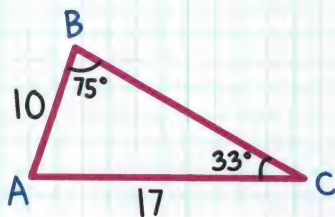
4. $\triangle PQR$ và $\triangle STU$



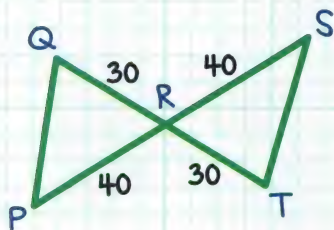


BÀI TẬP

5. $\triangle ABC$ và $\triangle DEF$



6. $\triangle PQR$ và $\triangle STR$



LỜI GIẢI



1. $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\angle A \cong \angle D$,
 $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$

2. Có, $\triangle JKL \cong \triangle LMJ$, SSS

3. Có, $\triangle ABD \cong \triangle DCA$, SSS

4. Không

5. Không

6. Có, $\triangle PQR \cong \triangle STR$, SAS

Chương 13

TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU GÓC - CẠNH - GÓC VÀ GÓC - GÓC - CẠNH

Ta còn nhiều cách để xác định các tam giác có bằng nhau không:

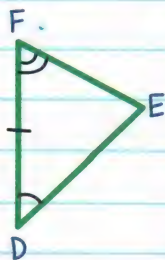
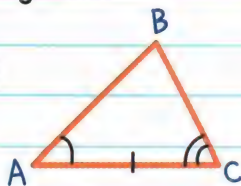
TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU GÓC -
CẠNH - GÓC (G.C.G)

**TIỀN ĐỂ BẰNG NHAU
GÓC - CẠNH - GÓC (G.C.G)**

Nếu hai góc và **CẠNH XEN GIỮA** của một tam giác bằng với hai góc và cạnh xen giữa của một tam giác khác thì hai tam giác bằng nhau.

Nếu $\angle A \cong \angle D$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$,

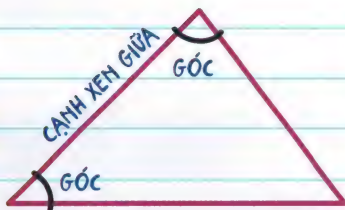
và $\angle C \cong \angle F$



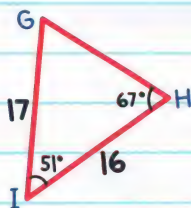
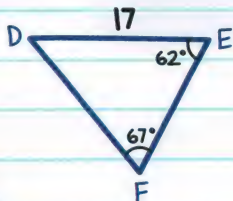
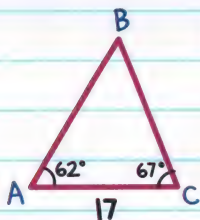
Thì $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

CẠNH XEN GIỮA

cạnh giữa hai góc
của một tam giác



VÍ DỤ: Những tam giác nào sau đây bằng nhau theo trường hợp góc - cạnh - góc (G.C.G)?



Mỗi tam giác có một cạnh có độ dài là 17. Đó sẽ là những cạnh xen giữa.

Trước tiên ta tìm số đo của góc liền kề chưa biết.

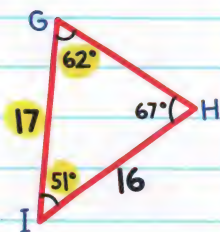
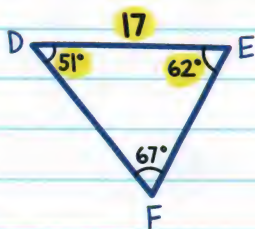
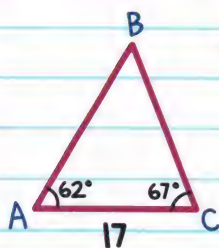
$$m\angle D + m\angle E + m\angle F = 180^\circ \quad m\angle G + m\angle H + m\angle I = 180^\circ$$

$$m\angle D + 62^\circ + 67^\circ = 180^\circ$$

$$m\angle G + 67^\circ + 51^\circ = 180^\circ$$

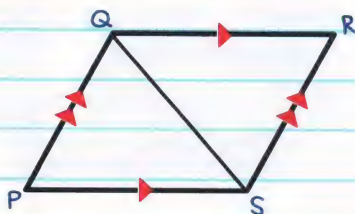
$$m\angle D = 51^\circ$$

$$m\angle G = 62^\circ$$



$\angle D \cong \angle I$, $\overline{DE} \cong \overline{IG}$, và $\angle E \cong \angle G$,
do đó $\triangle DEF \cong \triangle IGH$ theo TIÊN ĐỀ BẰNG NHAU
GÓC - CẠNH - GÓC.

Kể cả không biết chính xác
số đo của các góc và cạnh,
ta vẫn có thể chứng minh
các tam giác bằng nhau.

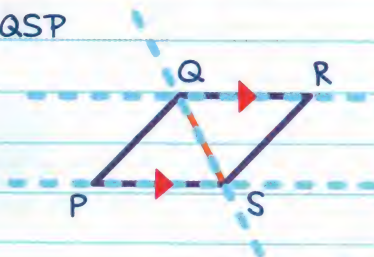


Ta biết rằng $\overline{QR} \parallel \overline{PS}$
(giả thiết đã cho).

Sử dụng giả thiết \overline{PS} và \overline{QR} là các đường
thẳng song song còn \overline{QS} là cát tuyến.

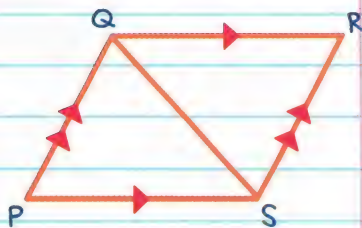
Như vậy ta sẽ có $\angle SQR \cong \angle QSP$
(góc so le trong bằng nhau).

$\overline{QP} \parallel \overline{RS}$ (giả thiết đã cho)



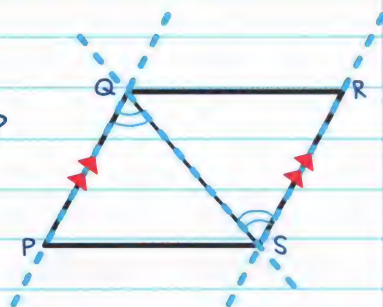
$\angle PQS \cong \angle QSR$ (góc so le trong bằng nhau.)

$\overline{QS} \cong \overline{QS}$ (Đây là cạnh chung của cả hai tam giác.)

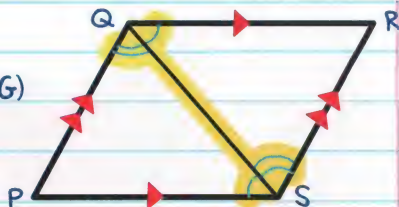


Chứng minh bằng đoạn văn:

Ta có giả thiết $\overline{QR} \parallel \overline{PS}$
và $\overline{QP} \parallel \overline{RS}$. $\angle SQR \cong \angle QSP$
và $\angle PQS \cong \angle QSR$ theo
ĐỊNH LÝ GÓC SO LE TRONG.
Đồng thời ta cũng có $\overline{QS} \cong \overline{QS}$ theo TÍNH CHẤT PHẢN XẠ
CỦA QUAN HỆ BẰNG NHAU..



Vậy theo TIÊN ĐỀ BẰNG
NHAU GÓC - CẠNH - GÓC (G.C.G)
ta được $\triangle PQS \cong \triangle RSQ$.



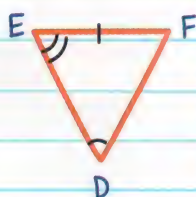
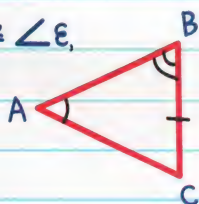
TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU GÓC - GÓC - CẠNH (G.G.C)

TIÊN ĐỀ BẰNG NHAU GÓC - GÓC - CẠNH (G.G.C)

Nếu hai góc và một cạnh không xen giữa của một tam giác bằng với hai góc và cạnh không xen giữa tương ứng của một tam giác khác thì hai tam giác bằng nhau.

Nếu $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$,
và $\overline{BC} \cong \overline{EF}$

Thì $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

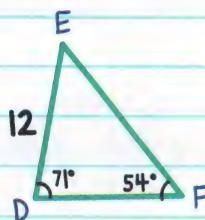
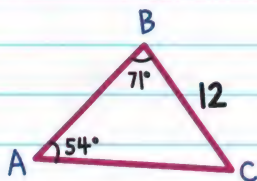


VÍ DỤ: Chứng minh $\triangle ABC \cong \triangle FDE$.

$$\angle A \cong \angle F$$

$$\angle B \cong \angle D$$

$$\overline{BC} \cong \overline{DE}$$



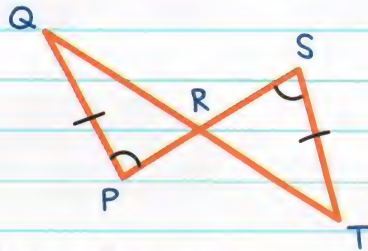
Vậy theo TIÊN ĐỀ BẰNG NHAU GÓC - GÓC - CẠNH (G.G.C)
ta được $\triangle ABC \cong \triangle FDE$.

VÍ DỤ:

Chứng minh hai tam giác dưới đây bằng nhau.

Giả thiết: $\angle P \cong \angle S$

$\overline{QP} \cong \overline{TS}$



$\angle QRP \cong \angle SRT$ (Các góc đối đỉnh bằng nhau.)

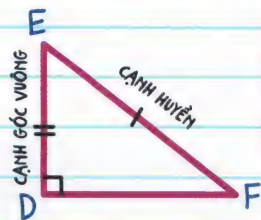
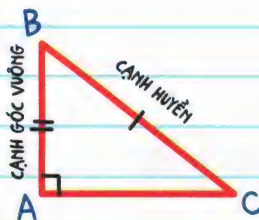
Theo **TIÊN ĐỀ BẰNG NHAU GÓC - GÓC - CẠNH** ta được
 $\triangle PQR \cong \triangle STR$.

ĐỊNH LÝ CẠNH HUYỀN

Định lý bằng nhau này chỉ áp dụng cho tam giác vuông.

Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của một tam giác vuông bằng với cạnh huyền và một cạnh góc vuông của một tam giác vuông khác thì hai tam giác bằng nhau.

Nếu $\angle A$ và $\angle D$ là các góc vuông, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, và $\overline{AB} \cong \overline{DE}$
 Thì $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



CẠNH CẠNH
CẠNH



tất cả các cạnh bằng nhau

CẠNH GÓC
CẠNH



hai cạnh và góc xen giữa bằng nhau

GÓC CẠNH
GÓC



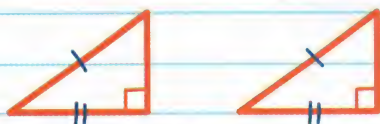
hai góc và cạnh xen giữa bằng nhau

GÓC GÓC
CẠNH



hai góc và một cạnh không xen giữa
bằng nhau

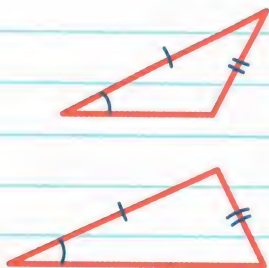
CẠNH HUYỀN



cạnh huyền và một cạnh góc vuông
của hai tam giác vuông bằng nhau

TRƯỜNG HỢP CẠNH CẠNH GÓC CÓ KHẲNG ĐỊNH HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU KHÔNG?

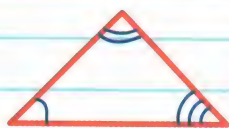
Hai tam giác này có hai cặp cạnh tương ứng bằng nhau và một cặp góc không xen giữa bằng nhau nhưng chúng có hình dạng khác nhau.



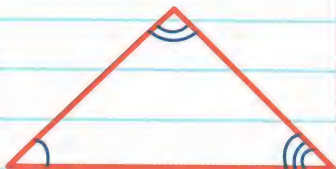
Như vậy trường hợp C.C.G không thể chứng minh hai tam giác bằng nhau.

TRƯỜNG HỢP GÓC GÓC GÓC CÓ KHẲNG ĐỊNH HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU KHÔNG?

Hai tam giác này có ba cặp góc tương ứng bằng nhau nhưng chúng có hình dạng khác nhau.



Như vậy trường hợp G.G.G không thể chứng minh hai tam giác bằng nhau.

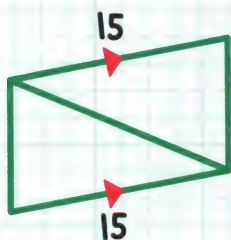




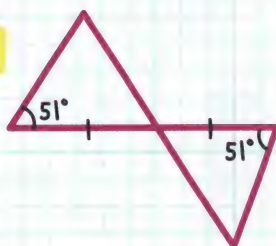
BÀI TẬP

Từ câu 1-5, hãy chỉ rõ tiên đề hay định lý bằng nhau nào em sẽ sử dụng để chứng minh các tam giác bằng nhau. Nếu không sử dụng tiên đề hay định lý nào thì hãy viết câu trả lời là "không".

1.



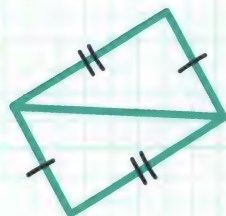
2.



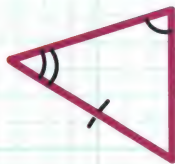
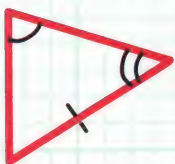
3.



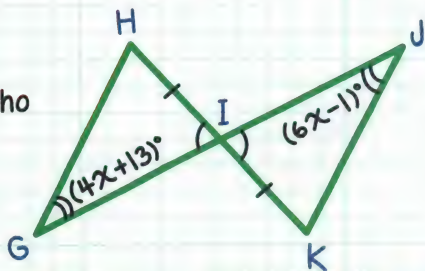
4.



5.



6. Tìm giá trị của x sao cho $\triangle GHI \cong \triangle JKI$.



LỜI GIẢI



1. C.G.C

2. G.C.G

3. C.H

4. C.C.C

5. G.G.C

6. $x = 7$

Chương 14

CÁC ĐƯỜNG TRONG TÂM GIÁC

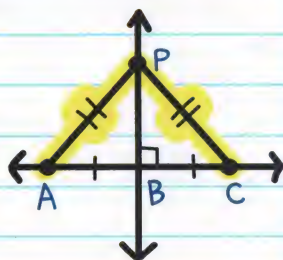
ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA ĐOẠN THẲNG

Đường trung trực của một đoạn thẳng luôn cắt đoạn thẳng đó tại một góc vuông (90°), và chia đoạn thẳng đó thành hai phần bằng nhau.

ĐỊNH LÝ ĐƯỜNG TRUNG TRỰC

Nếu một điểm nằm trên đường trung trực của một đoạn thẳng thì điểm đó **CÁCH ĐỀU** hai đầu đoạn thẳng.

có khoảng cách
bằng nhau



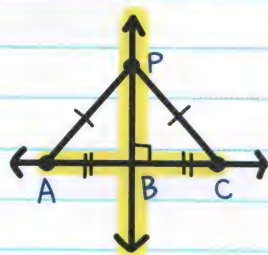
Nếu điểm P nằm trên đường trung trực của \overline{AC} , thì $AP = PC$.

Định lý đảo của định lý này cũng đúng.

ĐỊNH LÝ ĐẢO CỦA ĐỊNH LÝ ĐƯỜNG TRUNG TRỰC

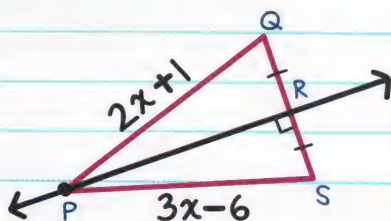
Nếu một điểm cách đều hai đầu một đoạn thẳng thì nó nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng đó.

Nếu $AP = PC$ thì điểm P nằm trên đường trung trực của \overline{AC} .



VÍ DỤ: Tìm giá trị của x trong hình vẽ đã cho.

Vì \overrightarrow{PR} là đường trung trực của \overline{QS} nên P cách đều Q và S .

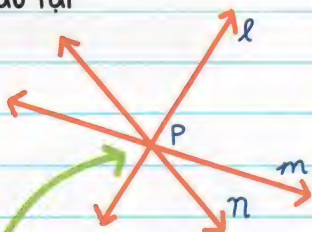


$$PQ = PS$$

$$2x + 1 = 3x - 6$$

$$x = 7$$

Khi ba đường thẳng trở lên cắt nhau tại cùng một điểm, ta gọi chúng là **ĐỒNG QUY**. Giao điểm của chúng được gọi là **ĐIỂM ĐỒNG QUY**.

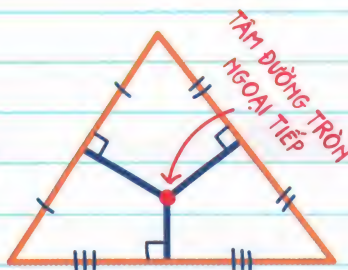


Đường thẳng l , m , và n đồng quy.

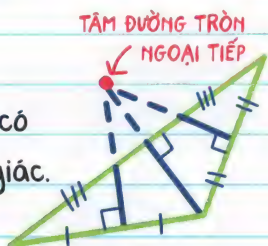
P là điểm đồng quy của ba đường thẳng.

TÂM ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP

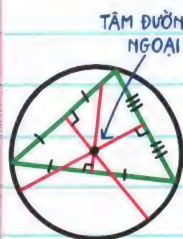
Trong một tam giác, ba đường trung trực gặp nhau tại một điểm, đó là **TÂM ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP** tam giác.



Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác có thể nằm ngoài hoặc nằm trong tam giác.



Ta có thể vẽ một cung tròn đi qua ba đỉnh của một tam giác bất kỳ. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác chính là tâm của cung tròn đó.

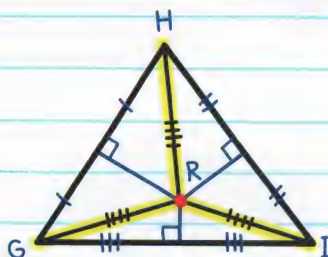


HÃY NGHĨ TỚI TÂM ĐƯỜNG TRÒN!



ĐỊNH LÝ TÂM ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP

Tâm đường tròn ngoại tiếp một tam giác cách đều các đỉnh của tam giác đó.

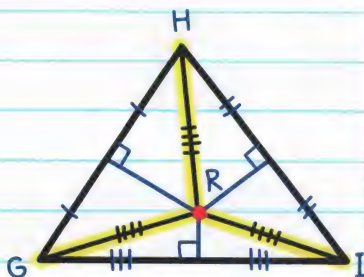


Nếu R là tâm đường tròn ngoại tiếp của $\triangle GHI$, thì $HR = GR = RI$.

VÍ DỤ: Trong $\triangle GHI$, $HR = 3x - 7$, $GR = x + 3$.

Hãy tìm độ dài của RI .

Nếu R là tâm đường tròn ngoại tiếp của $\triangle GHI$, thì $HR = GR = RI$.



Bước 1: Tìm giá trị của x .

$$HR = GR$$

$$3x - 7 = x + 3$$

$$2x - 7 = 3$$

$$2x = 10$$

$$x = 5$$

Bước 2: Tính HR (hoặc GR - chúng có độ dài bằng nhau).

$$HR = 3x - 7 = 3(5) - 7 = 8$$

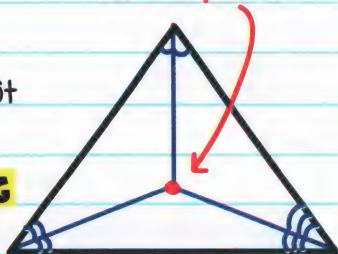
Vì $HR = RI$,

$$RI = 8$$

TÂM ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

Trong một tam giác, phân giác của ba góc trong gặp nhau tại một điểm. Điểm này nằm ở giữa tam giác và được gọi là **TÂM ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP** tam giác.

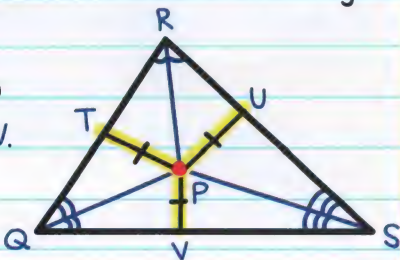
TÂM ĐƯỜNG
TRÒN NỘI TIẾP



ĐỊNH LÝ TÂM ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

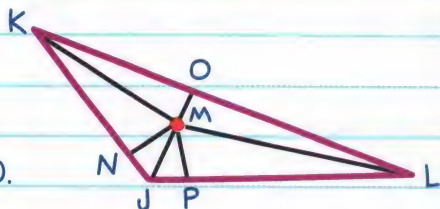
Tâm đường tròn nội tiếp cách đều các cạnh của tam giác.

Nếu P là tâm đường tròn nội tiếp thì $PT = PU = PV$.



VÍ DỤ: Biết M là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle JKL$, $MN = 3x + 16$, và $MP = 7x + 12$. Hãy tìm độ dài MO .

Từ định lý
tâm đường tròn nội tiếp
ta suy ra $MN = MP = MO$.



Bước 1: Tìm giá trị của x .

Vì $MN = MP$ nên ta có:

$$3x + 16 = 7x + 12$$

$$16 = 4x + 12$$

$$4 = 4x$$

$$x = 1$$

Bước 2: Tìm độ dài của MO .

Thay thế giá trị của x vào MN ta được

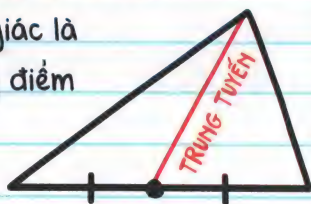
$$MN = 3x + 16 = 3(1) + 16 = 19$$

Vì $MN = MO$ nên

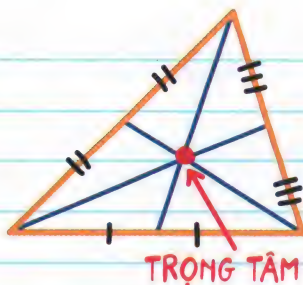
$$MO = 19$$

TRUNG TUYẾN VÀ TRỌNG TÂM

TRUNG TUYẾN của một tam giác là đường thẳng nối từ đỉnh tới trung điểm của cạnh đối diện.



Mọi tam giác đều có ba trung tuyến cắt nhau tại một điểm gọi là **TRỌNG TÂM**.

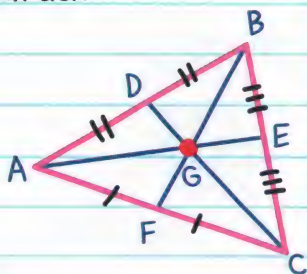


ĐỊNH LÝ TRỌNG TÂM

Trọng tâm nằm ở $\frac{2}{3}$ độ dài từ đỉnh đến trung điểm cạnh đối diện.

Nếu G là trọng tâm của $\triangle ABC$ thì ta có

$$BG = \frac{2}{3} BF, \quad AG = \frac{2}{3} AE, \quad CG = \frac{2}{3} CD$$



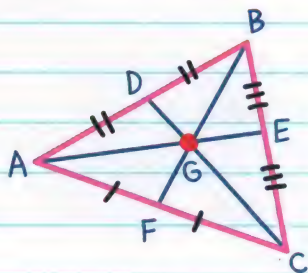
VÍ DỤ: Trong $\triangle ABC$ ở trên, biết $BG = 8$.

Hãy tìm độ dài của GF và BF .

Từ định lý trọng tâm ta có:

$$BG = \frac{2}{3} BF$$

$$8 = \frac{2}{3} BF$$



$$8 \times 3 = \frac{2}{3} BF \times 3$$

Nhân cả hai vế với 3.

$$24 = 2 \times BF$$

Chia cả hai vế cho 2.

$$BF = 12$$

Đến đây ta có thể tìm độ dài GF bằng cách sử dụng
TIÊN ĐỀ CỘNG ĐOẠN THẲNG:

$$BF = BG + GF$$

$$12 = 8 + GF$$

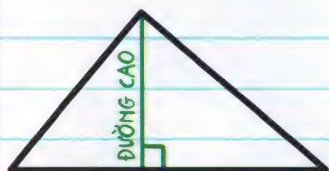
$$GF = 4$$

Nếu ta muốn giữ thăng bằng bằng một chiếc đĩa hình tam giác trên đầu ngón tay, ta cần đặt ngón tay vào trọng tâm mới cân bằng được chiếc đĩa. Điểm này được gọi là trọng tâm trọng lực - nghĩa là điểm mà khối lượng dàn đều.



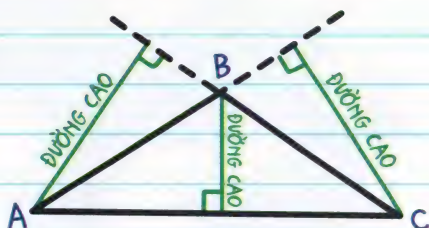
ĐƯỜNG CAO VÀ TRỤC TÂM

ĐƯỜNG CAO của một tam giác là đoạn thẳng nối từ một đỉnh đến cạnh đối diện và vuông góc với cạnh đó. Đường cao có thể nằm ngoài hoặc nằm trong tam giác.



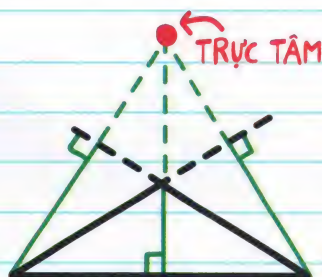
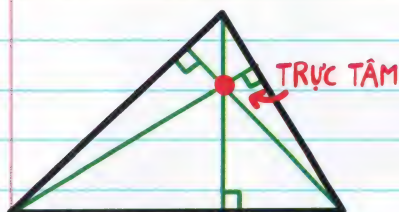
vuông góc với cạnh
đối diện với đỉnh

Mọi tam giác đều có ba đường cao.


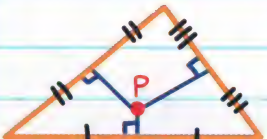
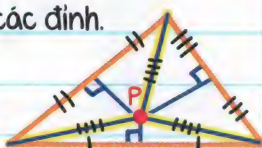
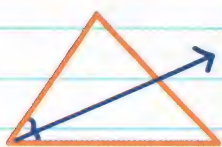
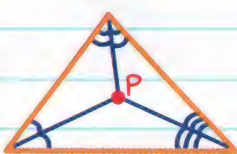

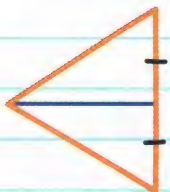
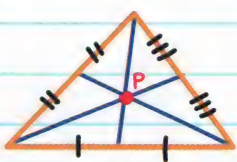
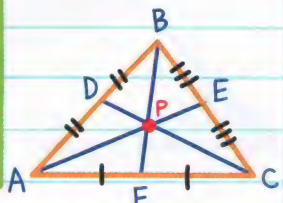


Điểm mà các đường cao của một tam giác gặp nhau gọi là **TRỤC TÂM**.

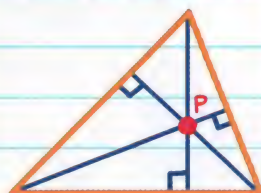
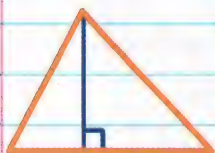
Trục tâm có thể nằm ngoài hoặc nằm trong tam giác.



Các đường trong tam giác và các điểm đồng quy của chúng:

TÊN GỌI	ĐIỂM ĐỒNG QUY (P)	ĐỊNH LÝ
<p>đường trung trực</p> 	<p>tâm đường tròn ngoại tiếp</p> 	<p>Tâm đường tròn ngoại tiếp của một tam giác cách đều các đỉnh.</p> 
<p>đường phân giác</p> 	<p>tâm đường tròn nội tiếp</p> 	<p>Tâm đường tròn nội tiếp cách đều các cạnh của tam giác.</p> 
<p>trung tuyến</p> 	<p>trọng tâm</p> 	<p>Nếu P là trọng tâm của $\triangle ABC$ thì</p> $BP = \frac{2}{3} BF, AP = \frac{2}{3} AE,$ $CP = \frac{2}{3} CD$ 

TÊN GỌI	ĐIỂM ĐỒNG QUY (P)	ĐỊNH LÝ
đường cao	trục tâm	Không có định lý về điểm này



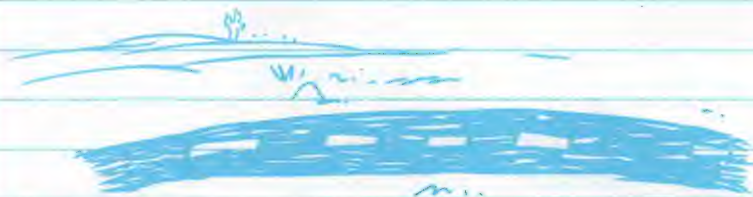
Ta có một cách để ghi nhớ các khái niệm tương ứng với mỗi loại điểm đồng quy như sau:

Trung tuyến - Trọng tâm, Đường cao - Trục tâm,

Trung trực - Tâm đường tròn ngoại tiếp,

Phân giác - Tâm đường tròn nội tiếp.

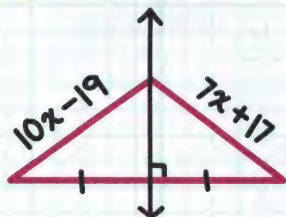
Tuyến đường trọng tâm phân giữa nội ngoại.



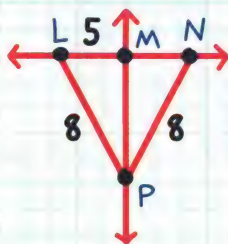


BÀI TẬP

1. Tìm giá trị của x .

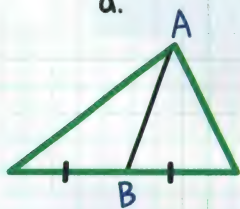


2. Tìm độ dài của MN .

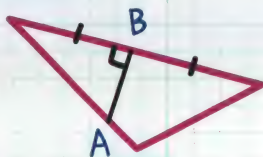


3. Với các tam giác được vẽ minh họa trong các phần a, b và c dưới đây, hãy chỉ rõ AB là đường trung trực, trung tuyến hay đường cao.

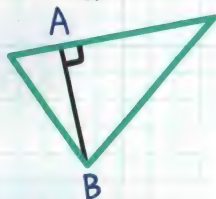
a.



b.

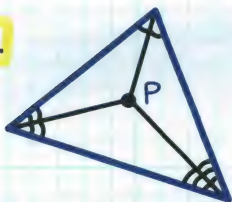


c.

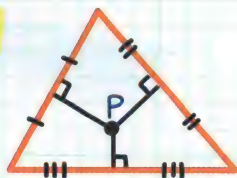


Từ câu 4-7, hãy cho biết điểm P là tâm đường tròn nội tiếp, tâm đường tròn ngoại tiếp hay trực tâm của tam giác đã cho.

4.

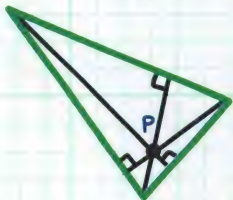


5.

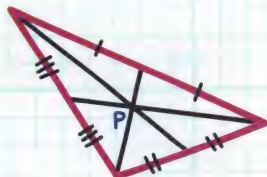


BÀI TẬP

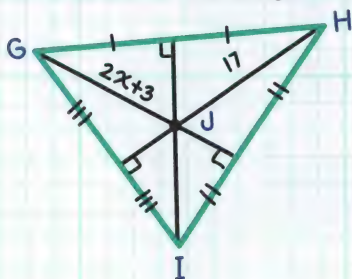
6.



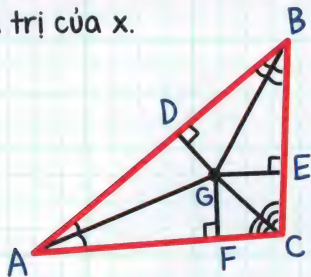
7.



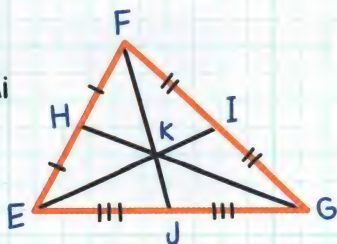
8. Tìm độ dài của JI trong $\triangle GHI$ dưới đây.



9. Trong $\triangle ABC$, biết $DG = 2x + 3$ và $GF = 3x - 7$. Hãy tìm giá trị của x .



10. Trong tam giác dưới đây, biết $EI = 135$. Hãy tìm độ dài của EK và KI .



LỜI GIẢI

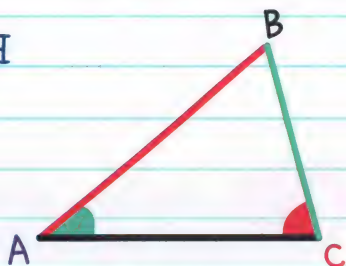


1. $10x - 19 = 7x + 17$ nên $x = 12$
2. $MN = 5$
3. a. trung tuyến; b. trung trực; c. đường cao
4. tâm đường tròn nội tiếp
5. tâm đường tròn ngoại tiếp
6. trực tâm
7. trọng tâm
8. $JI = 17$
9. $2x + 3 = 3x - 7$ nên $x = 10$
10. $EK = \frac{2}{3}(135)$ nên $EK = 90$, $KI = 45$

Chương 15

BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC

SO SÁNH CÁC CẠNH VÀ CÁC GÓC



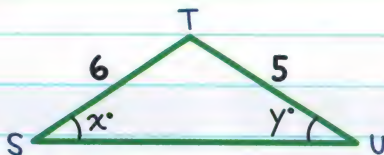
Khi so sánh hai cạnh của một tam giác, góc đối diện với cạnh dài hơn có số đo lớn hơn góc đối diện với cạnh ngắn hơn.

Nếu $\overline{AB} > \overline{BC}$, thì $m\angle C > m\angle A$.

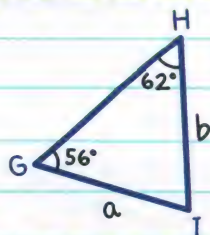
Khi so sánh hai góc của một tam giác, cạnh đối diện với góc lớn hơn thì dài hơn cạnh đối diện với góc nhỏ hơn.

Nếu $m\angle C > m\angle A$, thì $\overline{AB} > \overline{BC}$.

VÍ DỤ: Vì $6 > 5$ nên $y > x$.



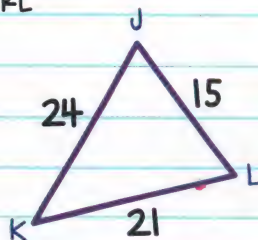
VÍ DỤ: Vì $62^\circ > 56^\circ$ nên $a > b$.



VÍ DỤ: Liệt kê các góc trong $\triangle JKL$ theo thứ tự từ lớn đến nhỏ.

Vì $\overline{JK} > \overline{KL} > \overline{JL}$ ($24 > 21 > 15$),

Nên $m\angle L > m\angle J > m\angle K$.



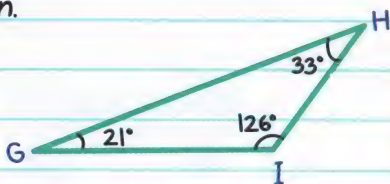
VÍ DỤ: Liệt kê các cạnh trong $\triangle GHI$

theo thứ tự từ dài đến ngắn.

Vì $m\angle I > m\angle H > m\angle G$

($126^\circ > 33^\circ > 21^\circ$),

Nên $\overline{GH} > \overline{GI} > \overline{HI}$



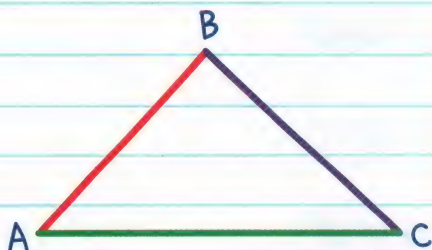
ĐỊNH LÝ BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC

Tổng của độ dài hai cạnh bất kỳ trong một tam giác luôn lớn hơn độ dài của cạnh thứ ba. Nói cách khác, khi cộng độ dài của hai cạnh, ta được tổng số luôn lớn hơn độ dài của cạnh thứ ba.

$$AB + BC > AC$$

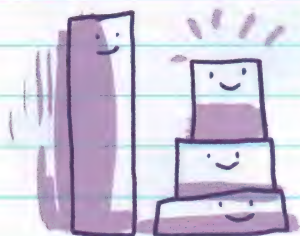
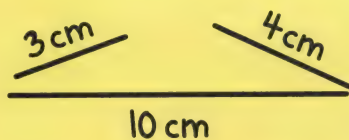
$$BC + AC > AB$$

$$AB + AC > BC$$



Ba chiếc que này sẽ không bao giờ tạo thành một tam giác vì tổng độ dài của hai que ngắn nhỏ hơn độ dài của que dài nhất.

$$3 \text{ cm} + 4 \text{ cm} < 10 \text{ cm}$$



VÍ DỤ:

Có tam giác nào có ba cạnh dài 14, 21 và 30 không?

Kiểm tra xem độ dài hai cạnh bất kỳ có lớn hơn cạnh thứ ba không.

$$14 + 21 > 30$$

$$35 > 30 \quad \checkmark$$

$$14 + 30 > 21$$

$$44 > 21 \quad \checkmark$$

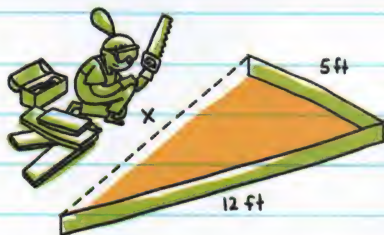
$$21 + 30 > 14$$

$$51 > 14 \quad \checkmark$$

Vì độ dài các cạnh thỏa mãn định lý bất đẳng thức tam giác nên các độ dài đã cho phù hợp là ba cạnh của một tam giác nào đó..



VÍ DỤ: Becky đang làm một hàng rào hình tam giác cho vườn rau. Bạn ấy có hai thanh gỗ dài 12ft và 5ft. Vậy cạnh thứ ba của hàng rào dài trong khoảng nào?



Ký hiệu độ dài cạnh thứ ba là x . Theo định lý bất đẳng thức tam giác ta có x phải thỏa mãn các điều kiện sau:

$$x + 5 > 12$$

$$x > 7$$

$$5 + 12 > x$$

$$17 > x$$

$$(\text{hoặc } x < 17)$$

$$12 + x > 5$$

$$x > -7$$

Vì $x > -7$ có giá trị âm nên ta có thể bỏ qua điều kiện này



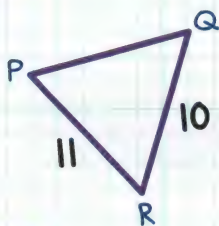
Chiều dài của cạnh thứ ba phải lớn hơn 7ft và nhỏ hơn 17ft.



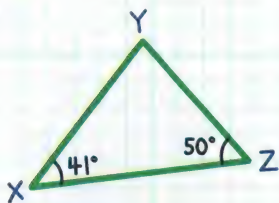
BÀI TẬP

Điền vào chỗ trống để hoàn thành các mệnh đề trong câu 1 và 2.

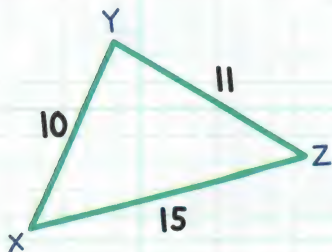
1. Vì $PR > QR$, _____ $>$ _____.



2. Vì $m\angle X < m\angle Z$, _____ $<$ _____.

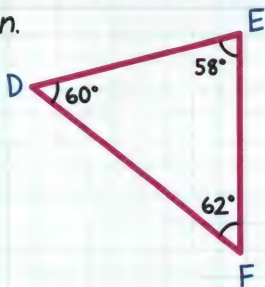


3. Liệt kê các góc trong $\triangle XYZ$ theo thứ tự từ lớn đến nhỏ.



BÀI TẬP

4. Liệt kê các cạnh trong $\triangle DEF$ theo thứ tự từ dài đến ngắn.



Trong các câu từ 5-8 hãy chỉ rõ độ dài các cạnh đã cho có thể tạo thành một tam giác hay không.

5. 7, 10, 15
6. 21, 30, 76
7. 5, 5, 9
8. 10, 23, 40
9. Một tam giác có hai cạnh dài 6 và 17 đơn vị độ dài. Hỏi cạnh thứ ba dài trong khoảng bao nhiêu?
10. Một tam giác có hai cạnh đều có độ dài bằng 22. Hỏi cạnh thứ ba dài trong khoảng bao nhiêu?

LỜI GIẢI



1. $m\angle Q > m\angle P$

2. $YZ < XY$

3. $\angle Y, \angle X, \angle Z$

4. $\overline{DF}, \overline{EF}, \overline{DE}$

5. Có

6. Không

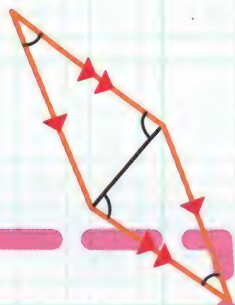
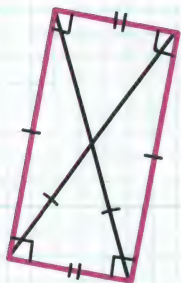
7. Có

8. Không

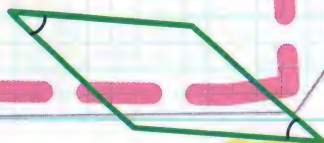
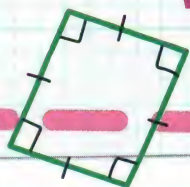
9. $11 < x < 23$

10. $0 < x < 44$

BÀI 4



Tứ giác
và đa giác



Chương 16

HÌNH BÌNH HÀNH

TỨ GIÁC

TỨ GIÁC là hình có bốn cạnh.

TỨ = 4





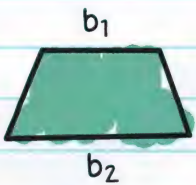
GIÁC = GÓC

Ta gọi tên tứ giác bằng bốn chữ cái ký hiệu cho các đỉnh của tứ giác.



Tứ giác này gọi là PQRS.

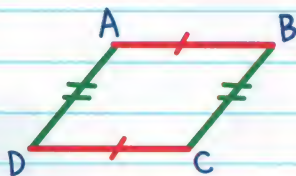
Các tứ giác thường dùng:

TÊN GỌI	VÍ DỤ	TÍNH CHẤT
Hình bình hành		Các cạnh đối song song và bằng nhau.
Hình chữ nhật		Một hình bình hành có bốn cạnh tạo thành các góc vuông.
Hình thoi		Một hình bình hành có các cạnh dài bằng nhau.
Hình vuông		Một hình bình hành có các cạnh dài bằng nhau và các cạnh tạo thành các góc vuông.
Hình thang		Có đúng hai cạnh song song. Các cạnh KHÔNG nhất thiết phải dài bằng nhau.

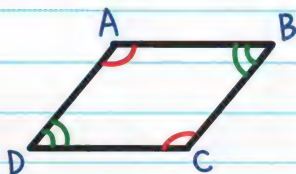
TÍNH CHẤT CỦA HÌNH BÌNH HÀNH

Hình bình hành có các tính chất sau:

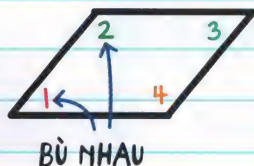
- các cạnh đối bằng nhau



- các góc đối bằng nhau



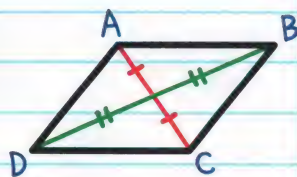
- các góc liên tiếp bù nhau



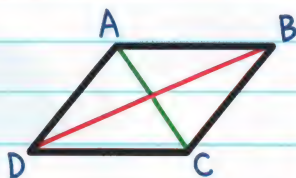
- các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường



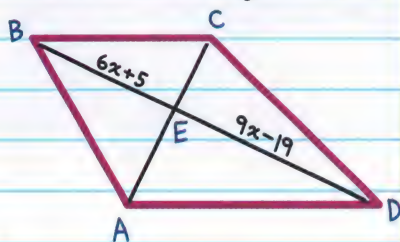
một đường chéo nối hai đỉnh không kề nhau



- mỗi đường chéo chia hình bình hành thành hai tam giác bằng nhau



VÍ DỤ: Cho ABCD là một hình bình hành. Hãy tìm độ dài của \overline{BD} .



Bước 1: Tìm giá trị của x .

Vì hai đường chéo trong hình bình hành cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên \overline{AC} chia \overline{BD} thành hai đoạn thẳng bằng nhau.

$$\overline{BE} \cong \overline{ED}$$

$$BE = ED$$

$$6x + 5 = 9x - 19$$

$$5 = 3x - 19$$

$$24 = 3x$$

$$x = 8$$

Bước 2: Tìm độ dài hai đoạn BE và ED.

$$BE = 6x + 5$$

$$= 6(8) + 5$$

$$= 48 + 5$$

$$= 53$$

$$ED = 9x - 19$$

$$= 9(8) - 19$$

$$= 72 - 19$$

$$= 53$$

Vì $BE = ED$ nên ta biết phần tính toán đã đúng.

Bước 3: Tìm độ dài BD.

$$BD = BE + ED$$

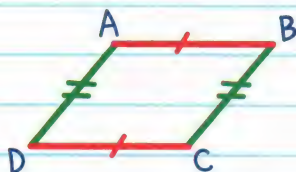
$$= 53 + 53$$

$$= 106$$

CÁC ĐỊNH LÝ CHỨNG MINH HÌNH BÌNH HÀNH

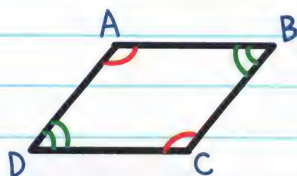
Ta có thể chứng minh một tứ giác là hình bình hành bằng cách sử dụng định lý bất kỳ sau đây:

Nếu hai cặp cạnh đối bằng nhau thì tứ giác là hình bình hành.



$$\overline{AB} \cong \overline{DC} \text{ và } \overline{AD} \cong \overline{BC}$$

Nếu hai cặp góc đối diện bằng nhau thì tứ giác là hình bình hành.



$$\angle A \cong \angle C \text{ và}$$

$$\angle B \cong \angle D$$

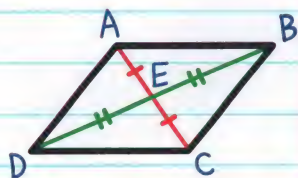
Nếu một góc bù với cả hai góc liền kề với nó thì tứ giác là hình bình hành.



$$m\angle 1 + m\angle 2 = 180^\circ$$

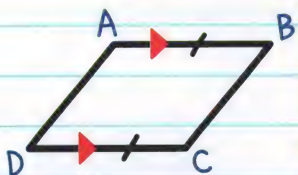
$$\text{và } m\angle 1 + m\angle 4 = 180^\circ$$

Nếu một tứ giác có các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường thì nó là hình bình hành.



$$\overline{AE} \cong \overline{EC} \text{ và } \overline{DE} \cong \overline{EB}$$

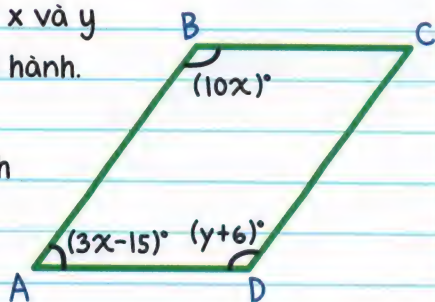
Nếu một tứ giác có một cặp cạnh song song và bằng nhau thì nó là hình bình hành.



$$\overline{AB} \cong \overline{DC} \text{ và } \overline{AB} \parallel \overline{DC}$$



VÍ DỤ: Tìm giá trị của x và y sao cho $ABCD$ là hình bình hành.



Để $ABCD$ là hình bình hành thì ta cần có:

1. $\angle A$ và $\angle B$ phải là hai góc bù nhau.

$$m\angle A + m\angle B = 180^\circ$$

$$(3x - 15) + (10x) = 180$$

$$13x - 15 = 180$$

$$13x = 195$$

$$x = 15^\circ$$

2. $\angle A$ và $\angle D$ phải là hai góc bù nhau.

$$m\angle A + m\angle D = 180^\circ$$

$$(3x - 15) + (y + 6) = 180$$

$$3(15) - 15 + y + 6 = 180$$

$$36 + y = 180$$

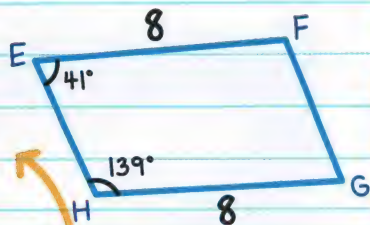
$$y = 144^\circ$$

VÍ DỤ:

Chứng minh rằng $EFGH$ là hình bình hành.

Vì $m\angle E + m\angle H = 180^\circ$
nên theo định lý đảo của
định lý góc trong cùng phía
ta có $\overline{EF} \parallel \overline{HG}$. Vì $EF = HG = 8$,
 $\overline{EF} \cong \overline{HG}$.

$EFGH$ có một cặp cạnh
song song và bằng nhau
nên nó là hình bình hành..



Nếu hai đường thẳng cắt
bởi một cát tuyến tạo
thành cặp góc trong cùng
phía bù nhau thì chúng
song song.





BÀI TẬP

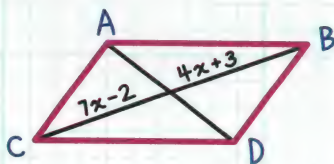
1. Hoàn thành câu sau:

Nếu một tứ giác là hình bình hành thì các cạnh đối của nó _____ và _____.

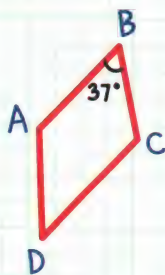
2. Hoàn thành câu sau:

Nếu một tứ giác là hình bình hành thì các góc liên tiếp của nó _____.

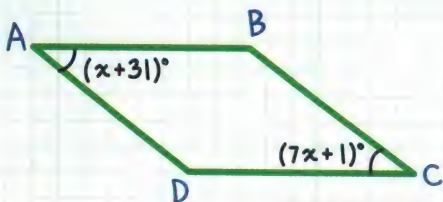
3. Biết ABCD là một hình bình hành. Hãy tìm giá trị của x .



4. Hãy tìm số đo các góc chưa biết trong hình bình hành ABCD.



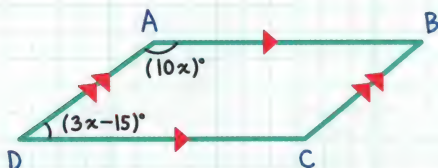
5. Hãy tìm giá trị của x , $m\angle A$, và $m\angle C$ trong hình bình hành đã cho.





BÀI TẬP

6. Hãy tìm giá trị của x , $m\angle A$, và $m\angle D$.

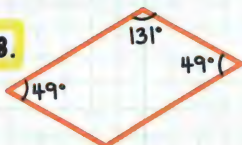


Từ câu 7-9, hãy chỉ rõ những thông tin đã cho có đủ để chứng minh tứ giác cho trước là hình bình hành không.

7.



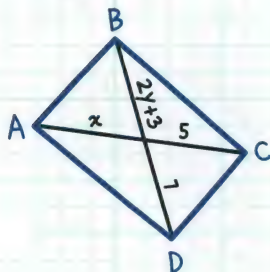
8.



9.



10. Hãy tìm giá trị của x và y sao cho ABCD là hình bình hành.



LỜI GIẢI



1. Bằng nhau, song song

2. Bù nhau

3. $7x - 2 = 4x + 3$ nên $x = \frac{5}{3}$

4. $m\angle A = 143$, $m\angle C = 143$, $m\angle D = 37$

5. $x + 31 = 7x + 1$ nên $x = 5$, $m\angle A = 36$, $m\angle C = 36$

6. $3x - 15 + 10x = 180$;
nên $x = 15$, $m\angle A = 150$, $m\angle D = 30$

7. Không

8. Có

9. Có

10. $2y + 3 = 7$ nên $y = 2$, $x = 5$

Chương 17

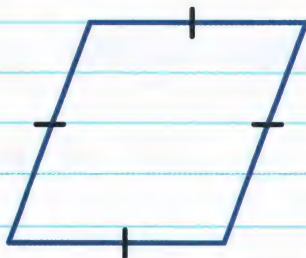
HÌNH THOI, HÌNH CHỮ NHẬT VÀ HÌNH VUÔNG

Hình thoi, hình chữ nhật và hình vuông cũng là hình bình hành.

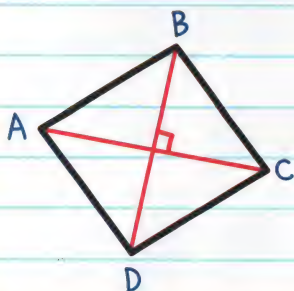
HÌNH THOI

HÌNH THOI là hình bình hành có bốn cạnh bằng nhau.

Hình thoi có tất cả các tính chất của hình bình hành, cộng thêm hai tính chất nữa.

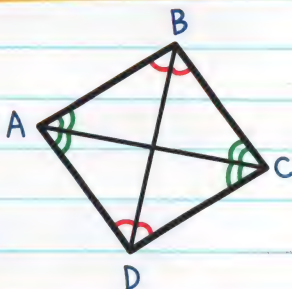


Hình thoi có các đường chéo vuông góc với nhau



\overline{AC} vuông góc với \overline{BD} .
Ta viết: $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

Mỗi đường chéo trong hình thoi đều chia đôi một cặp góc đối diện nhau



\overline{AC} chia đôi $\angle A$ và $\angle C$.
 \overline{BD} chia đôi $\angle B$ và $\angle D$.

VÍ DỤ: Hãy tìm $m\angle UVW$ trong hình thoi $TUVW$.

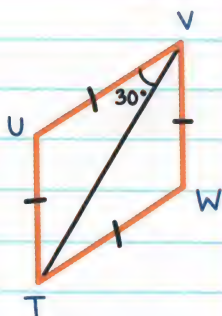
$\angle UVT$ có số đo bằng 30° .

\overline{TV} chia đôi $\angle UVW$.

Do đó $m\angle TVW$ cũng bằng 30° .

$$m\angle UVW = m\angle UVT + m\angle TVW$$

$$= 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$$



VÍ DỤ: Biết hình thoi DEFG có $m\angle EDG = 104^\circ$. Hãy tìm giá trị của x .

Vì các đường chéo của hình thoi vuông góc với nhau nên ta có:

$$m\angle DHE = 90^\circ$$

Vì mỗi đường chéo của hình thoi chia đôi cặp góc đối diện nhau nên ta có:

\overline{DF} chia đôi $\angle EDG$

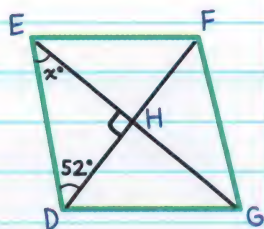
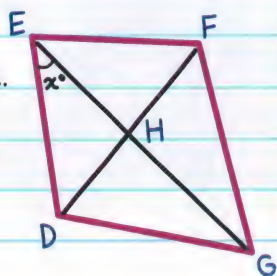
$$\begin{aligned} m\angle EDF &= \frac{1}{2} m\angle EDG \\ &= \frac{1}{2}(104^\circ) \\ &= 52^\circ \end{aligned}$$

Vì số đo các góc trong một tam giác cộng lại bằng 180° nên ta có:

$$x + 52 + 90 = 180$$

$$x + 142 = 180$$

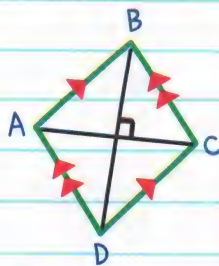
$$x = 38^\circ$$



CÁC ĐỊNH LÝ CHỨNG MINH HÌNH THOI

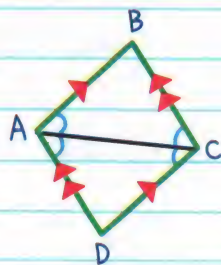
Sử dụng các định lý sau đây để chứng minh một hình bình hành là hình thoi:

Nếu hình bình hành có các đường chéo vuông góc với nhau thì nó là hình thoi.



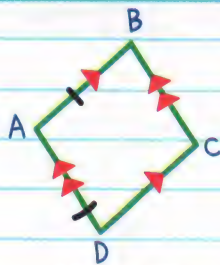
$$\overline{AC} \perp \overline{BD}$$

Nếu hình bình hành có một đường chéo chia đôi một cặp góc đối diện thì nó là hình thoi.



$$\overline{AC} \text{ chia đôi } \angle A \text{ và } \angle C$$

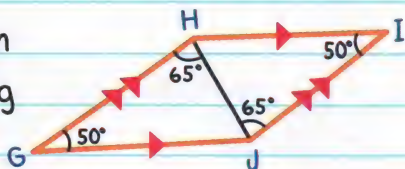
Nếu hình bình hành có một cặp cạnh liên tiếp bằng nhau thì nó là hình thoi.



$$\overline{AB} \cong \overline{AD}$$

VÍ DỤ: Hãy cho biết $GHIJ$ có là hình thoi không?

$GHIJ$ là một hình bình hành vì các cạnh đối của nó song song. Nếu đường chéo \overline{HJ} cắt đôi $\angle GHI$ và $\angle GJI$ thì nó là hình thoi.



Bước 1: Chứng minh $GHIJ$ là hình bình hành.

Vì $\overline{GH} \parallel \overline{JI}$ và $\overline{HI} \parallel \overline{GJ}$ nên cả hai cặp cạnh đối đều song song, vậy $GHIJ$ là hình bình hành.

Bước 2: Chứng minh $GHIJ$ là hình thoi.

Vì số đo các góc trong một tam giác cộng lại bằng 180° và GJH là tam giác nên ta có:

$$m\angle GJH + 50^\circ + 65^\circ = 180^\circ$$

$$m\angle GJH = 65^\circ$$

Vậy \overline{HJ} chia đôi $\angle GJI$.



Vì tổng số đo các góc trong một tam giác bằng 180° , và $\triangle JHI$ là tam giác nên ta có:

$$m\angle JHI + 50^\circ + 65^\circ = 180^\circ$$

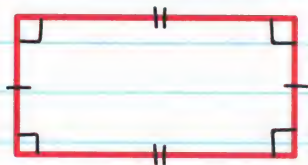
$$m\angle JHI = 65^\circ$$

Vậy \overline{HJ} chia đôi $\angle GHI$.

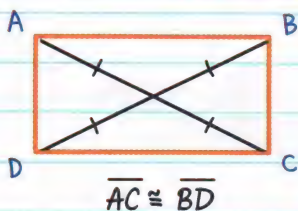
Vì một đường chéo của $GHIJ$ chia đôi một cặp góc đối diện nên nó là hình thoi.

HÌNH CHỮ NHẬT

HÌNH CHỮ NHẬT là hình bình hành có bốn góc vuông.



Nếu một hình bình hành là hình chữ nhật thì các đường chéo của nó bằng nhau.



Điều ngược lại cũng đúng:

Nếu một hình bình hành có các đường chéo bằng nhau thì nó là hình chữ nhật.

VÍ DỤ: Hai trụ gỗ trên

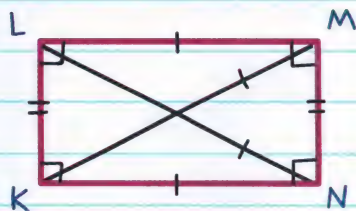
một hàng rào hình chữ nhật

có chiều dài là $LN = (5x + 2)$

ft và $KM = (20x - 18)$ ft. Hãy

tim độ dài xấp xỉ của các

thanh trụ.



Gần đúng, không cần quá chuẩn xác

Vì hàng rào có hình chữ nhật nên các đường chéo bằng nhau. Vậy ta có:

$$LN = KM$$

$$5x + 2 = 20x - 18$$

$$20 = 15x$$

$$x = \frac{20}{15}$$

$$= \frac{(20 \div 5)}{(15 \div 5)}$$

Rút gọn bằng cách chia cả tử số và mẫu số cho 5.

$$x = \frac{4}{3}$$

Chiều dài của các đường chéo là:

$$LN = 5x + 2$$

$$= 5\left(\frac{4}{3}\right) + 2$$

$$= \frac{26}{3} \approx 8,7$$

$$KM = 20x - 18$$

$$= 20\left(\frac{4}{3}\right) - 18$$

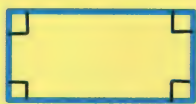
$$= \frac{26}{3} \approx 8,7$$

Vậy chiều dài của trụ gỗ
xấp xỉ bằng 8,7ft.

HÌNH VUÔNG

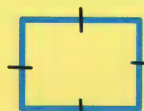
HÌNH VUÔNG là hình bình hành có bốn góc vuông và có bốn cạnh bằng nhau.

Một hình vuông vừa là hình chữ nhật vừa là hình thoi



HÌNH CHỮ NHẬT

+



HÌNH THOI

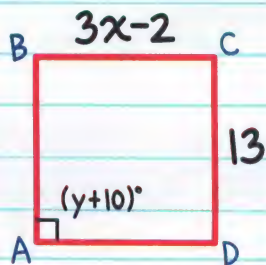
=



HÌNH VUÔNG

VÍ DỤ: Hãy tìm giá trị của x và y trong hình vuông ABCD.

Vì hình vuông có bốn cạnh bằng nhau nên ta có:



$$BC = CD$$

$$3x - 2 = 13$$

$$3x = 15$$

$$x = 5$$

Vì hình vuông cũng có bốn góc vuông nên ta có:

$$m\angle A = 90^\circ$$

$$y + 10 = 90$$

$$y = 80$$





BÀI TẬP

Từ câu 1-5, hãy chỉ rõ hình bình hành đã cho là hình chữ nhật, hình thoi hay hình vuông.

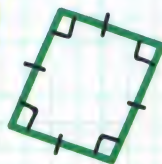
1.



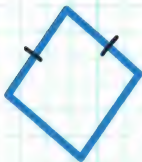
2.



3.



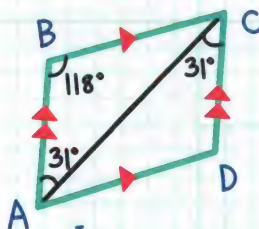
4.



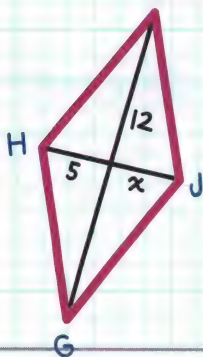
5.



6. Hãy cho biết ABCD có phải là hình thoi không?



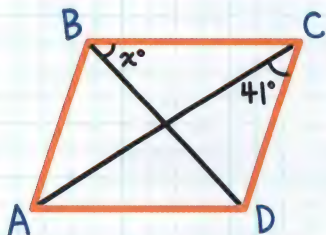
7. Hãy tìm giá trị của x trong hình thoi GHIJ.



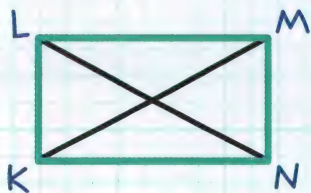


BÀI TẬP

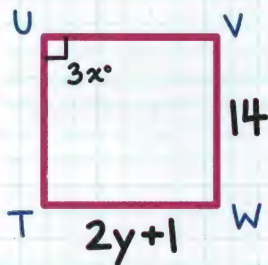
8. Hãy tìm giá trị của x trong hình thoi ABCD.



9. $LN = 24x - 30$ và $KM = 17x - 2$ trong hình chữ nhật KLMN. Hãy tìm giá trị của x , LN, và KM.



10. Tìm giá trị của x và y trong hình vuông TUVW.



LỜI GIẢI



1. hình thoi
2. hình thoi và hình chữ nhật
3. hình thoi và hình chữ nhật và hình vuông
4. hình thoi
5. hình chữ nhật
6. Có. Hình đã cho là hình bình hành có một đường chéo chia đôi một cặp góc đối diện.
7. $x = 5$
8. $x = 49$
9. $24x - 30 = 17x - 2$ nên $x = 4$, LN = 66, KM = 66
10. $3x = 90$ nên $x = 30$
 $2y + 1 = 14$ nên $y = \frac{13}{2}$

Chương 18

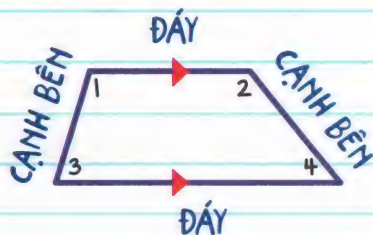
HÌNH THANG VÀ HÌNH ĐIỀU

Hình thang và hình điều là các tứ giác không phải hình bình hành.

HÌNH THANG

HÌNH THANG là một tứ giác có đúng một cặp cạnh song song.

Các cạnh song song được gọi là **đáy**, và các cạnh không song song được gọi là **cạnh bên**.



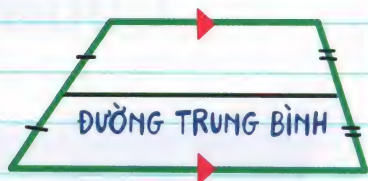
Các góc kề với đáy được gọi là **góc ở đáy**.

$\angle 1$ và $\angle 2$ là các góc ở đáy đối với đáy trên

$\angle 3$ và $\angle 4$ là các góc ở đáy đối với đáy dưới.

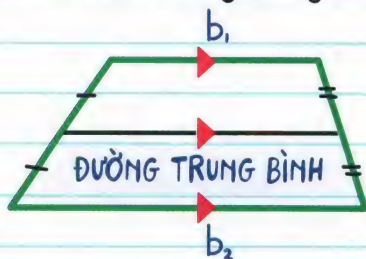
ĐƯỜNG TRUNG BÌNH của

hình thang là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh bên.



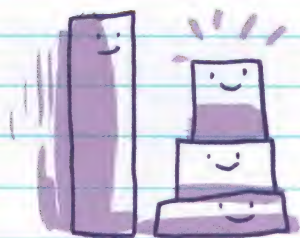
Đường trung bình của hình thang song song với hai đáy. Chiều dài của nó bằng trung bình cộng chiều dài hai đáy (cộng chiều dài hai đáy lại rồi chia đôi).

Chiều dài của đường trung bình = $\frac{b_1 + b_2}{2}$



HOẶC CÓ THỂ
TÍNH THẾ NÀY:

$$\frac{1}{2} (b_1 + b_2)$$

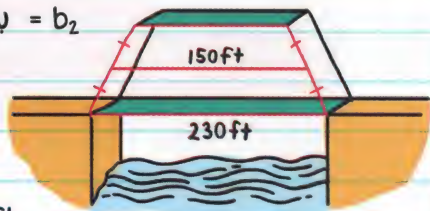


VÍ DỤ: Phần trụ của một cây cầu được kiến trúc theo dạng hình thang. Phần đáy dài 230ft và phần giữ trụ dài 150ft. Hỏi phần chóp của trụ dài bao nhiêu?

Ký hiệu phần chóp của trụ = b_1

Ký hiệu phần đáy của trụ = b_2

$$b_2 = 230 \text{ ft}$$



Đường trung bình = 150 ft

$$\text{Chiều dài của đường trung bình} = \frac{b_1 + b_2}{2}$$

$$150 = \frac{b_1 + 230}{2}$$

$$150 \times 2 = \frac{b_1 + 230}{2} \times 2 \quad \text{Nhân cả hai vế với 2.}$$

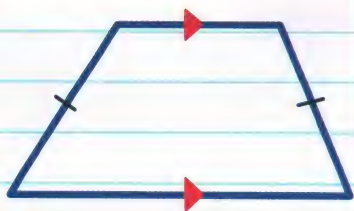
$$300 = b_1 + 230$$

$$b_1 = 70$$

Vậy phần chóp của trụ dài 70ft.

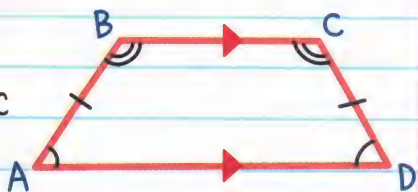
HÌNH THANG CÂN

HÌNH THANG có các cạnh bên bằng nhau.



Nếu một hình thang là hình thang cân thì nó có hai cặp góc ở đáy bằng nhau.

Nếu $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, thì $\angle B \cong \angle C$
và $\angle A \cong \angle D$.



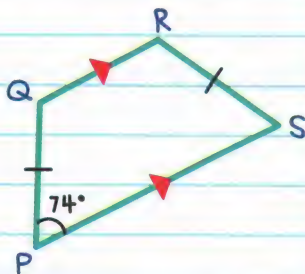
VÍ DỤ: Hãy tìm $m\angle Q$, $m\angle R$, và $m\angle S$.

Vì $\overline{QR} \parallel \overline{PS}$, $\angle Q$ và $\angle P$ là hai góc bù nhau (Định lý góc trong cùng phía) nên ta có:

$$m\angle Q + m\angle P = 180^\circ$$

$$m\angle Q + 74^\circ = 180^\circ$$

$$m\angle Q = 106^\circ$$



Khi hai đường thẳng song song cắt bởi một cát tuyến thì tạo thành các góc trong cùng phía bù nhau.

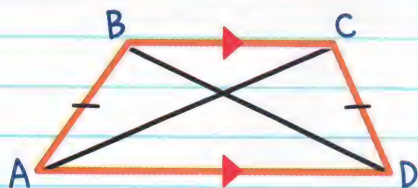
Vì các góc ở đáy của hình thang cân bằng nhau nên ta có

$$m\angle R = m\angle Q = 106^\circ$$

$$m\angle S = m\angle P = 74^\circ$$

Một hình thang là hình thang cân khi và chỉ khi hai đường chéo của nó bằng nhau.

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ khi và chỉ khi $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.



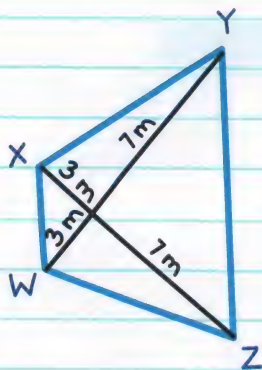
VÍ DỤ: Hãy cho biết hình thang WXYZ có cân không?

$$XZ = 3 + 7 = 10$$

$$WY = 3 + 7 = 10$$

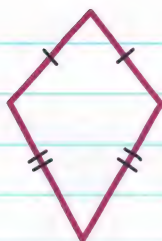
Vì $XZ = 10$ và $WY = 10$, $XZ = WY$.

Vì các đường chéo bằng nhau nên hình thang đã cho là hình thang cân.



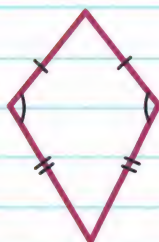
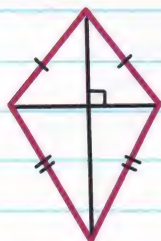
HÌNH ĐIỀU

HÌNH ĐIỀU là một tứ giác có hai cặp cạnh kề bằng nhau.



Nếu một tứ giác là hình điều thì các đường chéo của nó vuông góc với nhau.

Nếu một tứ giác là hình điều thì nó có ít nhất một cặp góc đối diện bằng nhau.

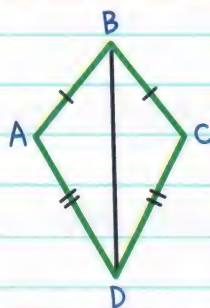


VÍ DỤ: Cho hình điều ABCD

có $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ và $\overline{AD} \cong \overline{CD}$,

hãy chứng minh $\angle A \cong \angle C$.

Giả thiết đã cho rằng $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ và $\overline{AD} \cong \overline{CD}$. Ta cũng có $\overline{BD} \cong \overline{BD}$. Vậy ta có $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (C.C.C). Vì các tam giác bằng nhau có các góc tương ứng bằng nhau nên ta suy ra $\angle A \cong \angle C$.



định lý tam giác bằng nhau theo trường hợp cạnh - cạnh - cạnh

CÁC LOẠI TỨ GIÁC TRONG HÌNH HỌC

TỨ GIÁC

Đa giác có 4 cạnh

HÌNH BÌNH HÀNH

Các cạnh đối \parallel

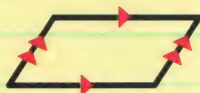
Các cạnh đối \cong

Các góc đối \cong

Các góc liên tiếp bù nhau

Đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

Đường chéo tạo thành hai tam giác \cong



HÌNH THOI

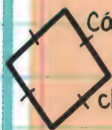
4 cạnh \cong

Các đường chéo \perp

Các đường

chéo chia đôi hai

góc đối diện



HÌNH VUÔNG

Vừa là hình thoi

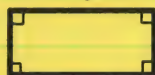
vừa là hình chữ nhật



HÌNH CHỮ NHẬT

4 góc vuông

Các đường chéo \cong



HÌNH DIỀU

2 cặp cạnh kề \cong

1 cặp góc đối \cong

Các đường chéo \perp



HÌNH THANG

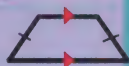
1 cặp cạnh \parallel

HÌNH THANG CÂN

Các cạnh bên \cong

Các góc ở đáy \cong

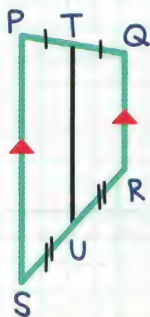
Các đường chéo \cong



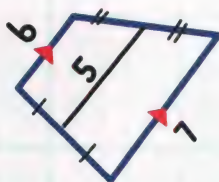


BÀI TẬP

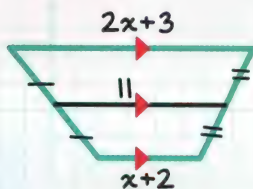
1. Kể tên các đáy, cạnh bên, góc ở đáy và đường trung bình trong tứ giác PQRS.



2. Hãy tìm giá trị của b.

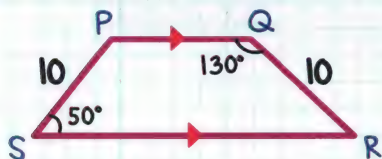


3. Hãy tìm giá trị của x.

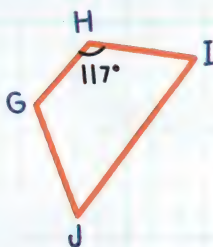


BÀI TẬP

4. Hãy tìm $m\angle P$ và $m\angle R$.

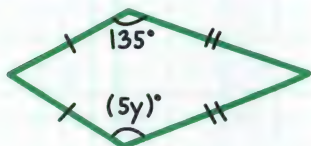


5. Hãy tìm số đo góc chưa biết trong hình thang cân GHIJ.



6. Các đường chéo của một hình thang cân có độ dài là $7x + 23$ và $15x + 19$. Hãy tìm giá trị của x .

7. Hãy tìm giá trị của y .



LỜI GIẢI



1. Các đáy: \overline{PS} và \overline{QR} ; các cạnh: \overline{PQ} và \overline{SR} ;
các góc ở đáy: $\angle P$ và $\angle S$, $\angle Q$ và $\angle R$;
đường trung bình: \overline{TU}

2. $\frac{b+7}{2} = 5$; do đó $b = 3$

3. $\frac{2x+3+x+2}{2} = 11$; do đó $x = \frac{17}{3}$

4. $m\angle P = 130^\circ$, $m\angle R = 50^\circ$

5. $m\angle G = 117^\circ$, $m\angle I = 63^\circ$, $m\angle J = 63^\circ$



6. $7x + 23 = 15x + 19$; do đó $x = \frac{1}{2}$

7. $135 = 5y$; do đó $y = 27$

Chương 19

SỐ ĐO CỦA GÓC TRONG ĐA GIÁC

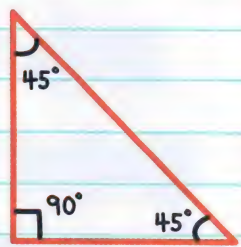
ĐA GIÁC là một hình phẳng đóng có ít nhất ba cạnh thẳng. Các đa giác được gọi tên theo số cạnh của nó.

SỐ CẠNH	TÊN GỌI	SỐ CẠNH	TÊN GỌI
 3	Tam giác	 7	Hình bảy cạnh
 4	Tứ giác	 8	Hình tám cạnh
 5	Ngũ giác	 9	Hình chín cạnh
 6	Lục giác	 10	Hình thập giác

SỐ ĐO CÁC GÓC TRONG

Các góc trong của một đa giác nằm trong phần bao quanh của hình.

Các góc trong của một tam giác cộng lại bằng 180° .



Điều này đúng với mọi tam giác.

$$90 + 45 + 45 = 180$$

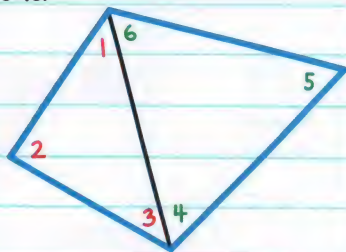
Ta có thể sử dụng thông tin này để tìm tổng số đo các góc trong những đa giác khác.

Một tứ giác có thể được tạo thành từ hai tam giác.

Các góc trong của mỗi tam giác là:

$$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$$

$$m\angle 4 + m\angle 5 + m\angle 6 = 180^\circ$$



Vậy tổng tất cả các góc trong của tứ giác đã cho là:

$$180^\circ + 180^\circ = 360^\circ \text{ Or } 2 \times 180^\circ = 360^\circ$$

Các góc trong của một tứ giác cộng lại bằng 360° .

Điều này đúng với mọi tứ giác.

Quy luật: Mỗi khi ta thêm một cạnh vào một đa giác thì tổng các góc trong tăng thêm 180° .

Quá trình đó cứ giữ nguyên với số cạnh bất kỳ.

SỐ CẠNH	SỐ TAM GIÁC	TỔNG SỐ ĐO CÁC GÓC TRONG
3	1	$1 \times 180^\circ$
4	2	$2 \times 180^\circ$
5	3	$3 \times 180^\circ$
n	$n - 2$	$(n - 2) \times 180^\circ$

Lấy số cạnh trừ 2 ta được hiệu số chính là số tam giác tạo thành đa giác.

$$\text{Tổng các góc trong} = (n - 2) \times 180^\circ$$

Biểu thức này có nghĩa "Tổng số đo các góc trong bằng số tam giác tạo thành tứ giác nhân 180° ."

VÍ DỤ: Tìm tổng số đo của các góc trong hình thập giác.

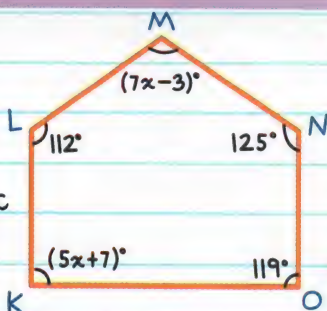
HÌNH THẬP GIÁC có 10 cạnh.

Tổng số đo các góc trong là:

$$(n - 2)180^\circ = (10 - 2)180^\circ = (8)180^\circ = 1440^\circ$$

VÍ DỤ: Hãy tìm $m\angle K$ trong hình ngũ giác đã cho.

Trước tiên ta tìm tổng số đo các góc trong ngũ giác:



$$(n - 2)180^\circ = (5 - 2)180^\circ = (3)180 = 540^\circ$$

Vì số đo các góc trong ngũ giác cộng lại bằng 540° nên ta có:

$$m\angle K + m\angle L + m\angle M + m\angle N + m\angle O = 540^\circ$$

$$(5x + 7) + 112 + (7x - 3) + 125 + 119 = 540$$

$$12x + 360 = 540$$

$$12x = 180$$

$$x = 15$$

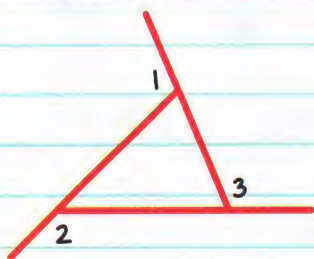
$$\text{Do đó ta có } m\angle K = (5x + 7)^\circ = [5(15) + 7]^\circ = 82^\circ$$

SỐ ĐO GÓC NGOÀI

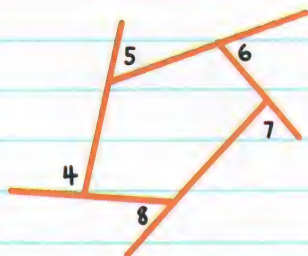
Góc ngoài là góc giữa cạnh của một đa giác và đường thẳng kéo dài từ cạnh kề bên.

ĐỊNH LÝ TỔNG GÓC NGOÀI ĐA GIÁC

Tổng số đo các góc ngoài luôn không đổi dù đa giác có bao nhiêu cạnh.



$$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 360^\circ$$



$$m\angle 4 + m\angle 5 + m\angle 6 + m\angle 7 + m\angle 8 = 360^\circ$$

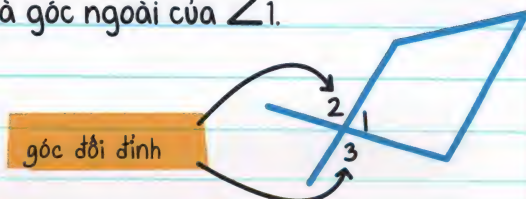
Số đo các góc ngoài của một đa giác cộng lại bằng 360° .

Chú ý: Chỉ sử dụng một góc ngoài tại mỗi đỉnh.

Hai góc ngoài tại mỗi đỉnh có cùng số đo.

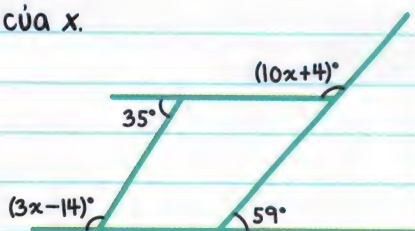
$\angle 2$ và $\angle 3$ cùng là góc ngoài của $\angle 1$.

$$\angle 2 \cong \angle 3$$



VÍ DỤ: Hãy tìm giá trị của x .

Vì số đo các góc ngoài cộng lại bằng 360° nên ta có:



$$35 + (10x + 4) + 59 + (3x - 14) = 360$$

$$13x + 84 = 360$$

$$13x = 276$$

$$x = 21.2^\circ$$

Một ĐA GIÁC ĐỀU có tất cả các góc bằng nhau và tất cả các cạnh bằng nhau. Để tìm số đo mỗi góc trong của một tam giác đều, ta chia tổng số đo các góc cho số cạnh.

VÍ DỤ: Hãy tìm số đo của mỗi góc trong hình bảy cạnh đều.

Một hình bảy cạnh có 7 cạnh, số đo các góc trong cộng lại bằng:

$$(n - 2)180^\circ = (7 - 2)180^\circ = (5)180^\circ = 900^\circ$$

Hình bảy cạnh đều có 7 góc bằng nhau, mỗi góc có số đo là:

$$\frac{900^\circ}{7} \approx 128.6^\circ$$

TÌM TỔNG SỐ ĐO CÁC GÓC VÀ CHIA CHO 7!





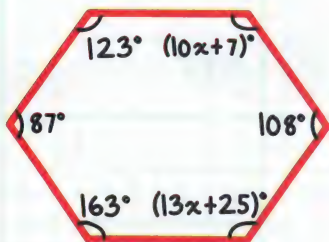
BÀI TẬP

1. Tìm tổng số đo các góc trong của hình 13 cạnh.

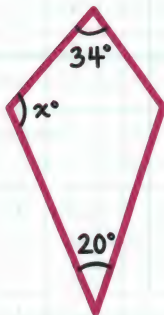
2. Tìm tổng số đo các góc trong của hình đa giác sau đây.



3. Hãy tìm giá trị của x .



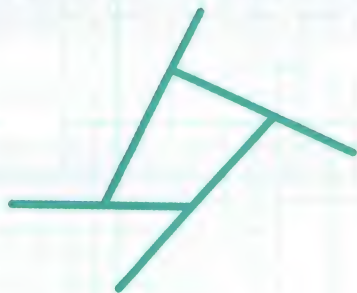
4. Hãy tìm giá trị của x trong hình điều đã cho.



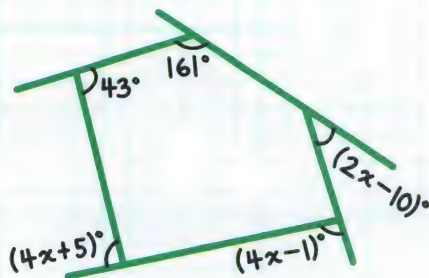


BÀI TẬP

5. Tổng số đo các góc ngoài của hình ngũ giác bằng bao nhiêu?
6. Tổng số đo các góc ngoài của hình tứ giác bằng bao nhiêu?



7. Hãy tìm giá trị của x .



8. Hãy tìm số đo của mỗi góc trong hình ngũ giác đều.

LỜI GIẢI



1. $(13 - 2)180 = 1980^\circ$

2. $(7 - 2)180 = 900^\circ$

3. $87 + 123 + 10x + 7 + 108 + 13x + 25 + 163 = (6 - 2)180$;
nên $x = 9$

4. $34 + x + 20 + x = (4 - 2)180$; nên $x = 153^\circ$

5. 360°

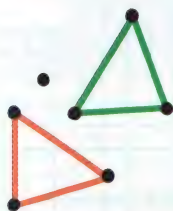
6. 360°

7. $4x + 5 + 137 + 19 + 2x - 10 + 4x - 1 = 360$; nên $x = 21^\circ$

8. $\frac{(5 - 2)180}{5}$; nên mỗi góc có số đo 108°



BÀI 5



Các phép
biến hình



Chương 20

PHÉP ĐỐI XỨNG TRỰC

PHÉP DỜI HÌNH

Các hình trên một mặt phẳng tọa độ có thể dịch chuyển theo hướng bất kỳ để tạo thành một hình mới tại vị trí mới. Quá trình dịch chuyển một hình như vậy được gọi là **PHÉP BIẾN HÌNH**.

Trong một phép biến hình, hình ban đầu được gọi là **HÌNH GỐC** còn hình mới được gọi là **ẢNH**.

Nếu hình dạng và kích cỡ của một hình vẫn giữ nguyên trong một phép biến hình thì quá trình dịch chuyển đó được gọi là **PHÉP DỜI HÌNH** hoặc **PHÉP BIẾN HÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG**.

Có ba dạng dời hình:

PHÉP ĐỐI XỨNG TRỰC

PHÉP TỊNH TIẾN

PHÉP QUAY

PHÉP ĐỐI XỨNG TRỰC

là một phép biến hình lật một ảnh qua một đường thẳng sao cho ảnh xuất hiện ngược lại, giống như soi gương.



Phép đối xứng trục là một phép dời hình: Hình dạng và kích cỡ của ảnh không thay đổi.

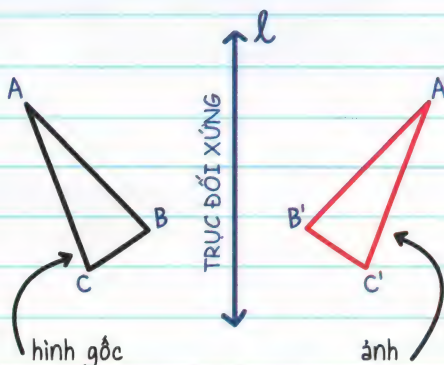
PHÉP ĐỐI XỨNG TRỰC

một dịch chuyển tương ứng (di chuyển) tất cả các điểm của hình sao cho mỗi điểm trên ảnh chuyển tới phía đối diện của trục đối xứng và có cùng khoảng cách tới điểm trên hình gốc.

$\triangle ABC$ là hình gốc.

$\triangle A'B'C'$ là ảnh.

Dấu (') được gọi là **PHẪY**.



Dấu phẩy biểu diễn điểm mới tương ứng với hình gốc.

$\triangle A'B'C'$ được đọc là: "tam giác A phẩy, B phẩy, C phẩy."

Đường thẳng l là **TRỤC ĐỐI XỨNG**. Ta nói $\triangle ABC$ đối xứng qua đường thẳng l .

Nếu ta gấp tờ giấy theo đường trục đối xứng thì hai tam giác sẽ vừa khít vào nhau.

khớp

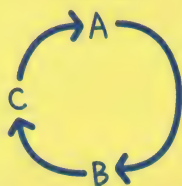
Phép đối xứng trục **CHO TƯƠNG ỨNG** mỗi điểm trên $\triangle ABC$ với một điểm tương ứng trên $\triangle A'B'C'$.

A tương ứng với A' B tương ứng với B' C tương ứng với C'

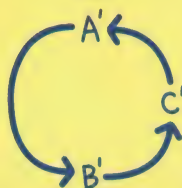
Phép đối xứng trục có **HƯỚNG NGƯỢC** (thứ tự các điểm đảo ngược lại). Ví dụ nếu A rồi đến B rồi đến C được sắp xếp theo thứ tự cùng chiều kim đồng hồ trong hình gốc thì A' rồi đến B' rồi đến C' được sắp xếp theo thứ tự ngược chiều kim đồng hồ trong ảnh.

HƯỚNG NGƯỢC

hình gốc



ảnh



PHÉP ĐỐI XỨNG TRỰC TRÊN MẶT PHẪNG TỌA ĐỘ

Ta có thể biểu diễn phép đối xứng trục trên mặt phẳng tọa độ.

Gọi cặp số theo thứ tự x, y là các tọa độ của một điểm trong hệ tọa độ.

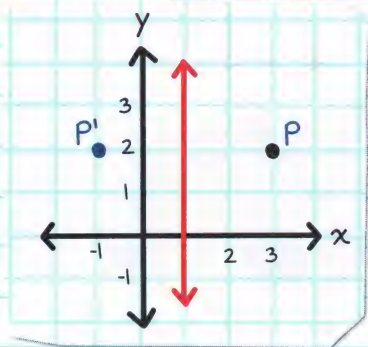
x cho biết vị trí dọc theo trục hoành (nằm ngang), còn y cho biết vị trí dọc theo trục tung (nằm dọc).

Ví dụ điểm $(3,4)$:

1. Bắt đầu ở gốc tọa độ là vị trí $(0,0)$.
 2. Di chuyển 3 đơn vị theo phương nằm ngang (về phía bên phải). Đây là hoành độ.
 3. Di chuyển 4 đơn vị theo phương thẳng đứng (lên trên). Đây là tung độ.
- * Nếu hoành độ là số âm thì ta di chuyển sang trái, nếu tung độ là số âm thì ta di chuyển xuống dưới.

Đường thẳng màu đỏ là trục đối xứng. Trục đối xứng này có phương trình là $x = 1$.

$x = 1$ nghĩa là tất cả các điểm trên trục đối xứng này đều có hoành độ bằng 1.



Ví dụ $(1, -1)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$

Điểm P, ta viết là $P(3, 2)$, cách 2 đơn vị về phía bên phải trục đối xứng. Điểm P', ta viết là $P'(-1, 2)$, cách 2 đơn vị về phía bên trái trục đối xứng.

$P(3, 2)$ tương ứng $P'(-1, 2)$. Ta viết như sau:

trước phép đối xứng trục

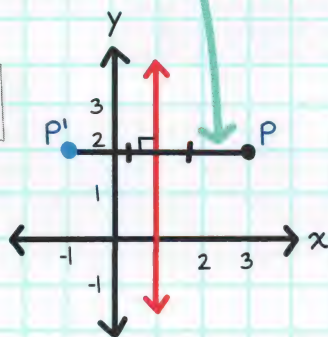
$P(3, 2) \rightarrow P'(-1, 2)$ Mũi tên được đọc là "tương ứng với":
 $P(3, 2)$ tương ứng với $P'(-1, 2)$.

sau phép đối xứng trục

Trục đối xứng là **ĐƯỜNG TRUNG TRỰC** của đoạn thẳng nối hai điểm tương ứng trên ảnh và hình gốc.

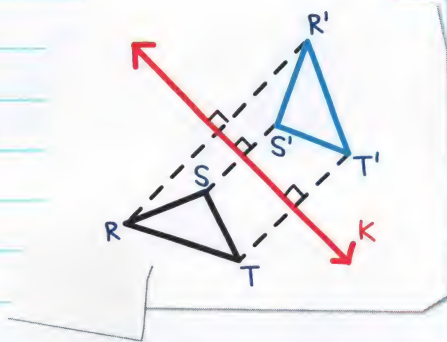
$\overline{PP'}$ nối các điểm trên ảnh và hình gốc.

Đường thẳng $x = 1$
(trục đối xứng) là
đường trung trực
của $\overline{PP'}$.

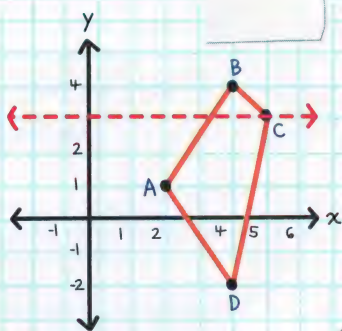


Trong ảnh sau đây các đường thẳng $\overline{RR'}$, $\overline{SS'}$, và $\overline{TT'}$ nối các điểm tương ứng trên ảnh và trên hình gốc.

$\triangle RST \rightarrow \triangle R'S'T'$, trục
đối xứng - đường thẳng
 k là ĐƯỜNG TRUNG TRỰC
của $\overline{RR'}$, $\overline{SS'}$, và $\overline{TT'}$.



VÍ DỤ: Tìm hình đối xứng
của tứ giác trong hình vẽ đã
cho trên mặt phẳng tọa độ
qua đường thẳng $y = 3$.



TÌM ĐIỂM ĐỐI XỨNG
CỦA CÁC ĐỈNH, SAU ĐÓ
NỐI CHÚNG LẠI.



Đường thẳng $y = 3$ là đường
thẳng nằm ngang. Tất cả các
điểm trên đường thẳng này
đều có tung độ bằng 3.

Vì trục đối xứng là đường trung trực của $\overline{AA'}$, nên nó cách đều hai điểm A và A' .

Ta hãy đếm số đơn vị từ điểm A đến trục đối xứng và xác định điểm A' sao cho A' cách trục đối xứng cùng số đơn vị đã đếm được về phía đối diện so với điểm A .

- Điểm A có tọa độ $(2, 1)$, cách 2 đơn vị ở phía dưới trục đối xứng.

Vậy điểm A' sẽ có tọa độ $(2, 5)$, cách 2 đơn vị ở phía trên trục đối xứng.

$$A(2, 1) \rightarrow A'(2, 5).$$

- Điểm B có tọa độ $(4, 4)$, cách 1 đơn vị ở phía trên trục đối xứng.

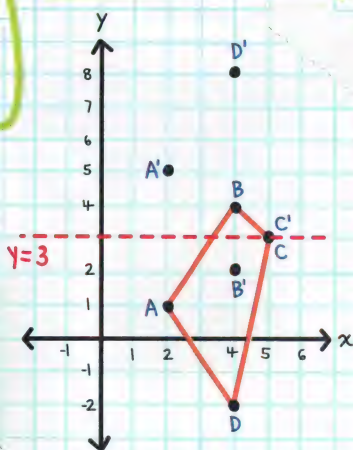
Vậy điểm B' sẽ cách 1 đơn vị ở phía dưới trục đối xứng.

$$B(4, 4) \rightarrow B'(4, 2).$$

- Điểm $C(5, 3)$ nằm trên trục đối xứng. Vì điểm này không có khoảng cách với trục đối xứng nên C' sẽ trùng với điểm đó luôn.

$$C(5, 3) \rightarrow C'(5, 3).$$

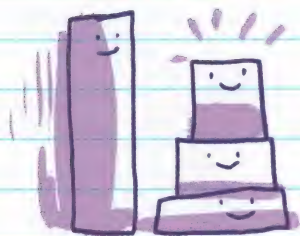
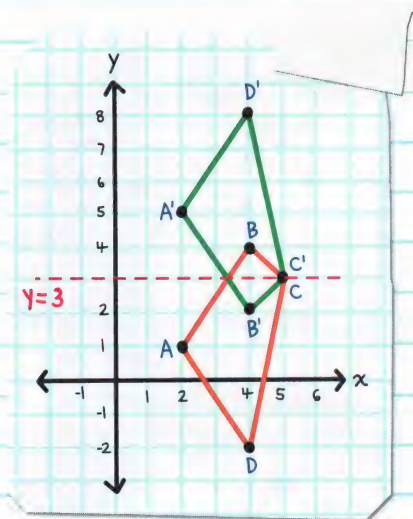
Mỗi điểm tương ứng với điểm phía đối diện của trục đối xứng.



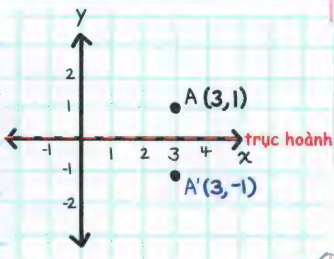
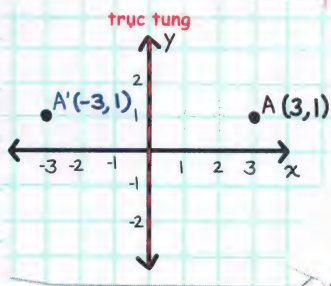
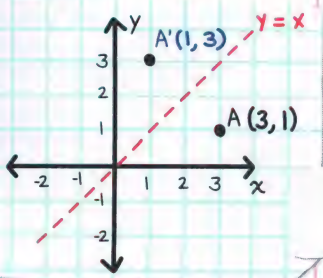
- Điểm $D(4, -2)$ cách 5 đơn vị *phía dưới* trục đối xứng. Vậy điểm D' sẽ cách 5 đơn vị *phía trên* trục đối xứng.

$$D(4, -2) \rightarrow D(4, 8).$$

Nối các đỉnh lại ta được ảnh của hình tứ giác đã cho.



Ta thường dùng ba trục đối xứng sau: *trục hoành*, *trục tung*, và đường thẳng $y = x$. Mỗi trục đối xứng có quy tắc riêng giúp ta tìm các điểm để tạo thành ảnh của hình gốc cho trước.

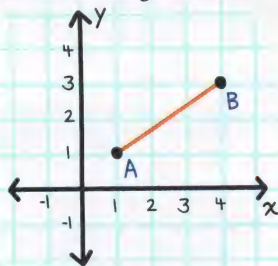
TRỤC ĐỐI XỨNG	QUY TẮC	VÍ DỤ
trục hoành	$(x, y) \rightarrow (x, -y)$ Nhân tung độ với -1 .	
trục tung	$(x, y) \rightarrow (-x, y)$ Nhân hoành độ với -1 .	
$y = x$	$(x, y) \rightarrow (y, x)$ Đảo vị trí của các tọa độ	

VÍ DỤ: Tìm ảnh của \overline{AB} qua phép đối xứng trục hoành.

Quy tắc: $(x, y) \rightarrow (x, -y)$

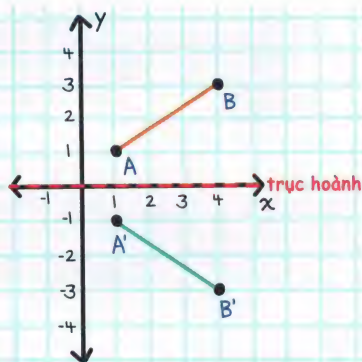
$A(1, 1) \rightarrow A'(1, -1)$

$B(4, 3) \rightarrow B'(4, -3)$



1. Xác định các điểm ảnh.

2. Vẽ đoạn thẳng nối các điểm vừa xác định.

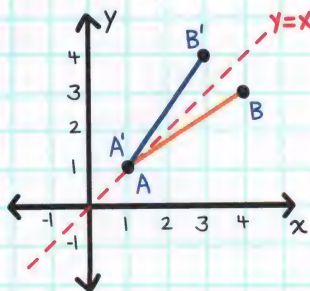


VÍ DỤ: Tìm ảnh của \overline{AB} qua phép đối xứng trục $y = x$.

Quy tắc: $(x, y) \rightarrow (y, x)$

$A(1, 1) \rightarrow A'(1, 1)$

$B(4, 3) \rightarrow B'(3, 4)$



1. Xác định các điểm ảnh.

2. Vẽ đoạn thẳng nối các điểm vừa xác định.

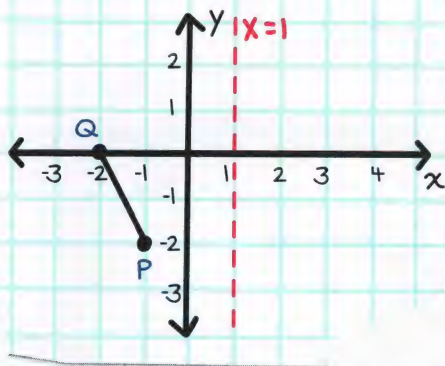


BÀI TẬP

1. Phép biến hình là gì?
2. Phép đối xứng trục là gì?
3. Điền vào chỗ trống trong câu sau: Trong phép đối xứng trục, điểm P và ảnh P' có cùng khoảng cách tới _____.

Với câu 4 và câu 5, biết $P(-1, -2)$ và $Q(-2, 0)$. Hãy vẽ ảnh của \overline{PQ} đối xứng qua các đường thẳng sau.

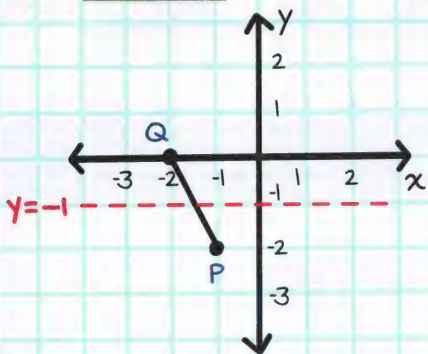
4. $x = 1$





BÀI TẬP

5. $y = -1$



LỜI GIẢI

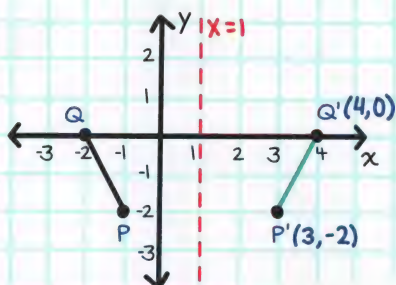


1. Phép biến hình thay đổi hình dạng, kích cỡ hoặc vị trí của một hình (hình gốc) để tạo thành một hình mới (ảnh).

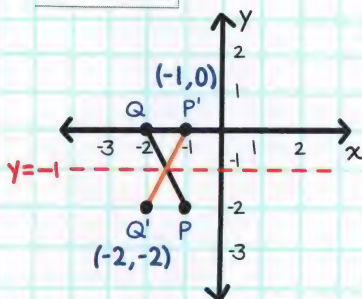
2. Phép đối xứng trục là một dạng của phép dời hình lật một ảnh qua một đường thẳng.

3. Trục đối xứng

4.



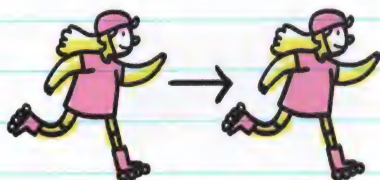
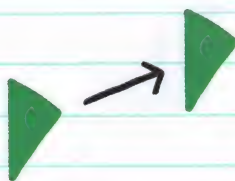
5.



Chương 21

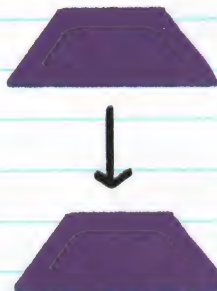
PHÉP TÍNH TIẾN

PHÉP TÍNH TIẾN là một dạng của phép dời hình, tức là di chuyển một hình đi một khoảng cách nào đó về phía bên trái hoặc phải, trên hoặc dưới, hoặc chéo đi một góc.



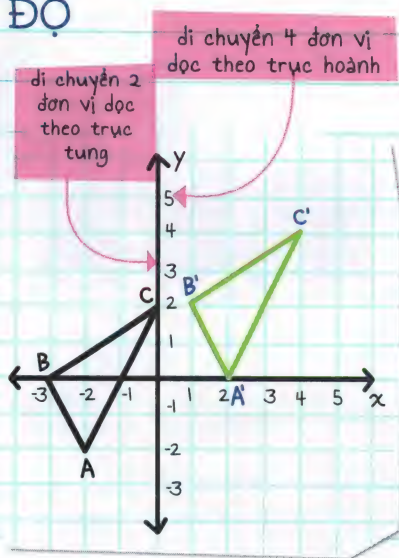
Mỗi điểm trong hình trượt đi cùng một khoảng cách theo cùng một hướng.

Hình dạng, kích cỡ và chiều của hình vẫn không thay đổi.



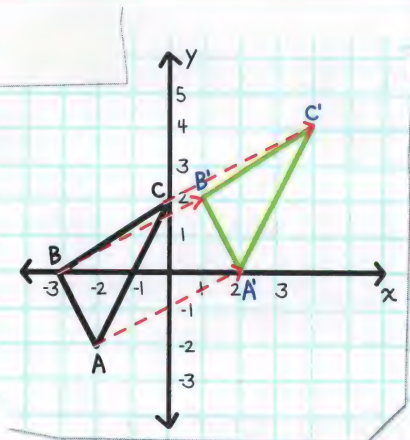
PHÉP TỊNH TIẾN TRÊN MẶT PHẪNG TOẠ ĐỘ

Phép tịnh tiến trên mặt phẳng toạ độ di chuyển tất cả các điểm trong ảnh đi cùng một khoảng theo cùng một hướng. Trong $\triangle ABC$, mỗi điểm di chuyển 4 đơn vị về phía bên phải (trục hoành) và 2 đơn vị về phía trên (trục tung).



Ta có thể định nghĩa (mô tả) phép tịnh tiến qua **VÉC-TƠ TỊNH TIẾN**.

Véc-tơ tịnh tiến sẽ chỉ ra mỗi điểm trong hình vẽ di chuyển bao nhiêu đơn vị qua phép tịnh tiến.



Véc-tơ tịnh tiến là $(4, 2)$.

2 đơn vị dọc theo hướng trục tung

4 đơn vị dọc theo hướng trục hoành

Nếu một véc-tơ tịnh tiến di chuyển một điểm a đơn vị dọc theo trục hoành và b đơn vị dọc theo trục tung thì véc-tơ tịnh tiến là (a, b) .

Công thức tịnh tiến là:

$(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$,
trong đó (a, b) là véc-tơ tịnh tiến.

Ví dụ: Một véc-tơ tịnh tiến $(-1, 3)$ sẽ có công thức tịnh tiến là $(x, y) \rightarrow (x - 1, y + 3)$. Phép tịnh tiến này di chuyển mỗi điểm 1 đơn vị sang bên trái và 3 đơn vị lên phía trên.

Với véc-tơ tịnh tiến đó, điểm $(5, -2)$ sẽ tương ứng với:

$(5, -2) \rightarrow (5 - 1, -2 + 3)$ chính là điểm $(4, 1)$

$$5 - 1 = 4$$

$$-2 + 3 = 1$$

Điểm $(-4, 7)$ tương ứng với:

$(-4, 7) \rightarrow (-4 - 1, 7 + 3)$ hay chính là
điểm $(-5, 10)$

$$-4 - 1 = -5$$

$$7 + 3 = 10$$



VÍ DỤ: Hãy tìm véc-tơ tịnh tiến và công thức tịnh tiến mô tả phép biến hình biến điểm $P \rightarrow P'$?

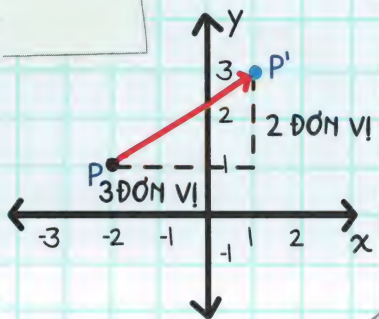
P di chuyển 3 đơn vị về phía bên phải và 2 đơn vị lên trên thành điểm P' .

Vậy ta có:

Véc-tơ tịnh tiến là $(3, 2)$.

Công thức tịnh tiến là:

$(x, y) \rightarrow (x + 3, y + 2)$.



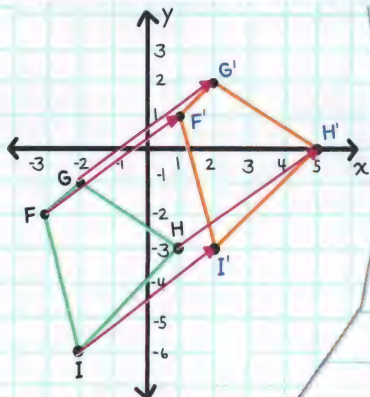
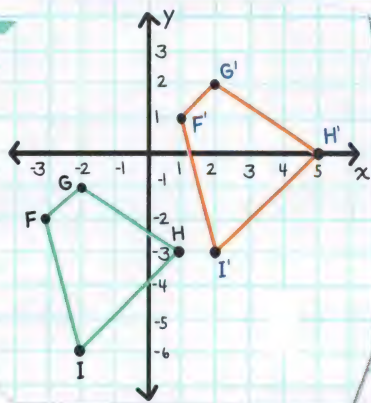
VÍ DỤ: Véc-tơ tịnh tiến và công thức tịnh tiến nào mô tả phép tịnh tiến tứ giác $FGHI \rightarrow F'G'H'I'$?

Mỗi điểm di chuyển 4 đơn vị sang phải và 3 đơn vị lên trên.

Véc-tơ tịnh tiến là $(4, 3)$.

Công thức tịnh tiến là

$(x, y) \rightarrow (x + 4, y + 3)$.



VÍ DỤ: Hãy vẽ ảnh tịnh tiến của $\triangle LMN$ biết véc-tơ tịnh tiến là $(-2, 5)$.

Di chuyển mỗi đỉnh 2 đơn vị về bên trái và 5 đơn vị lên trên.

Công thức tịnh tiến:

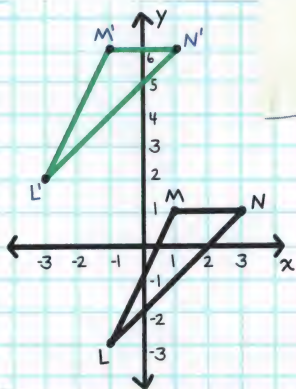
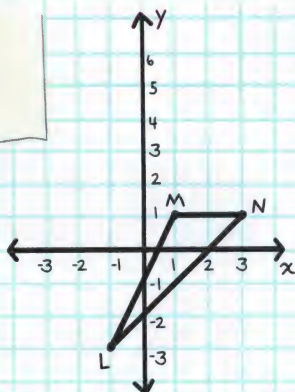
$$(x, y) \rightarrow (x - 2, y + 5)$$

Vẽ các điểm.

$$\begin{array}{l} (-1 - 2) \rightarrow (-3) \quad (-3 + 5) \\ L(-1, -3) \rightarrow L'(-3, 2) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (1 - 2) \rightarrow (-1) \quad (1 + 5) \\ M(1, 1) \rightarrow M'(-1, 6) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (3 - 2) \rightarrow (1) \quad (1 + 5) \\ N(3, 1) \rightarrow N'(1, 6) \end{array}$$



Nối các điểm.

GIÚP TỜ VỚI! TỜ ĐANG HỌC TOÁN
VÀ PHẢI DỊCH MỘT TAM GIÁC

ĐỂ LẤM. LÀ TRIANGULO.

KHÔNG, Ý TỜ LÀ DỊCH
HÌNH HỌC CƠ Í

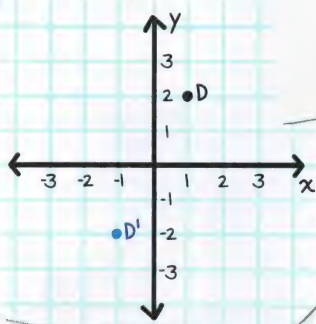
GEOMETRICO.

ÔI TRỜI
THÔI NHÉ.

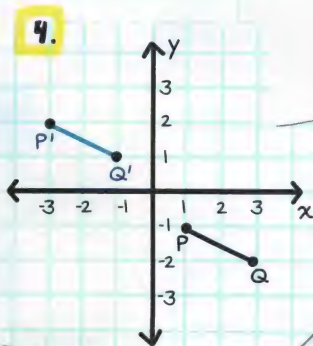
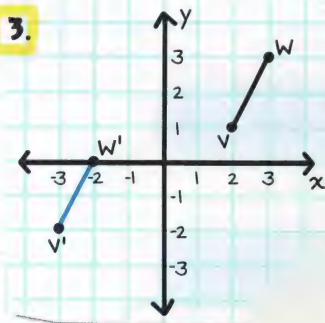


BÀI TẬP

1. Sau khi tịnh tiến một hình nào đó, đặc điểm gì của hình vẫn giữ nguyên không đổi?
2. Véc-tơ tịnh tiến nào biến điểm D thành D'?

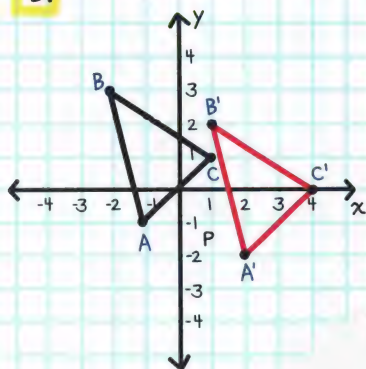


Từ câu 3-6, hãy cho biết hình vẽ sau đây có phải là phép tịnh tiến hay không.

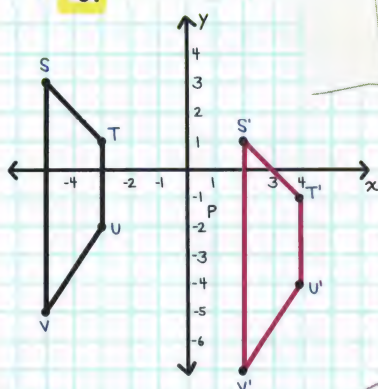


BÀI TẬP

5.



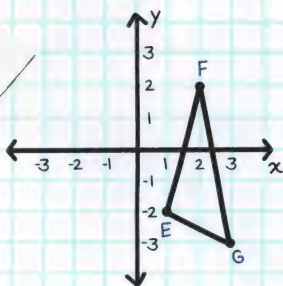
6.



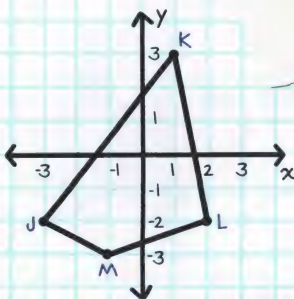
7. Véc-tơ tịnh tiến trong câu 6 là véc-tơ nào?

8. Công thức tịnh tiến mô tả phép tịnh tiến trong câu 6 là công thức nào?

9. Vẽ ảnh tịnh tiến của $\triangle EFG$ biết véc-tơ tịnh tiến là $(-3, 1)$.



10. Vẽ ảnh tịnh tiến của tứ giác dưới đây biết véc-tơ tịnh tiến là $(2, 0)$.



LỜI GIẢI



1. Hình dạng, kích cỡ và chiều của hình

2. $[-2, -4]$

3. Có, $[-5, -3]$

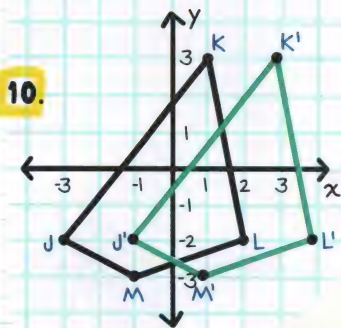
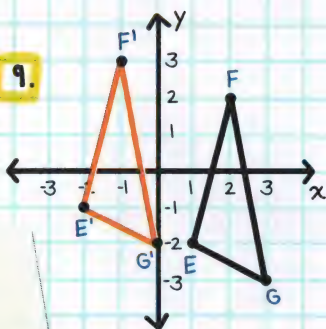
4. Có, $[-4, 3]$

5. Có, $[3, -1]$

6. Có

7. $[1, -2]$

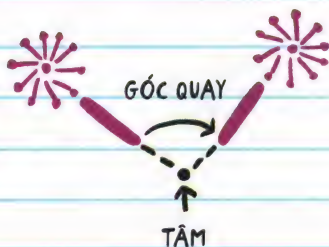
8. $(x, y) \rightarrow (x + 7, y - 2)$



Chương 22

PHÉP QUAY

PHÉP QUAY là phép biến hình xoay một hình quanh một điểm cố định. Phép quay là phép dời hình. Hình dạng, kích cỡ và số đo các góc trong hình vẫn giữ nguyên nhưng chiều của hình thay đổi.



Một phép quay gồm có:

- **TÂM** — điểm mà hình xoay quanh đó. Tâm của phép quay có thể nằm ở ngoài hình hoặc bất kỳ điểm nào trong hình, thậm chí nằm trên hình được xoay.
- **GÓC QUAY** — số độ mà mỗi điểm trên hình được xoay đi. Phép quay có thể xoay theo chiều kim đồng hồ hoặc ngược chiều kim đồng hồ.

cùng chiều kim đồng hồ = xoay về phía bên phải
ngược chiều kim đồng hồ = xoay về phía bên trái

Bất kỳ điểm nào và ảnh của nó cũng có cùng khoảng cách tới tâm của phép quay.

VÍ DỤ: Điểm T được quay x° ngược chiều kim đồng hồ quanh điểm R .

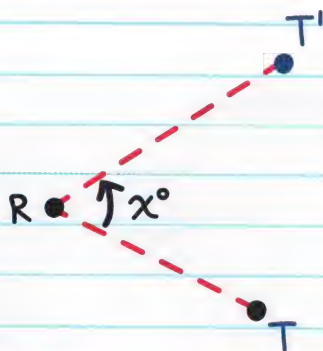
Tâm của phép quay là R .

Góc quay là x° .

T và T' cách đều R

là tâm của phép quay.

Ta viết: $RT = RT'$.

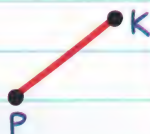


VẼ PHÉP QUAY

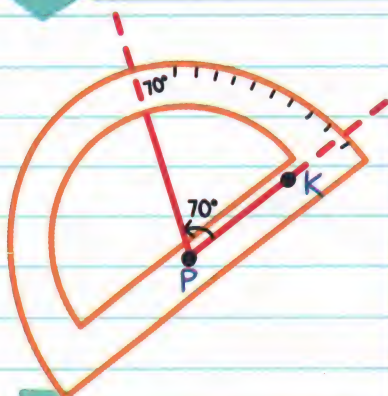
Ta có thể dùng thước đo góc và thước kẻ để vẽ một phép quay quanh một điểm.

Để quay điểm K 70° ngược chiều kim đồng hồ quanh điểm P , ta làm theo các bước sau:

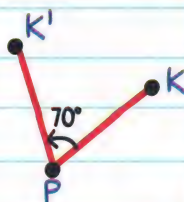
Bước 1: Vẽ đoạn thẳng từ P đến K .



Bước 2: Sử dụng thước đo góc để vẽ một góc 70° ngược chiều kim đồng hồ, ở phía bên trái từ \overline{PK} .

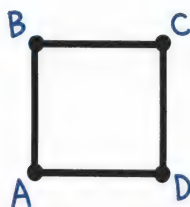


Bước 3: Đo độ dài \overline{PK} . Vẽ một điểm mới ký hiệu là K' trên cạnh vừa vẽ sao cho khoảng cách từ K' đến P bằng khoảng cách từ K đến P .



Quay một hình vuông

Để quay một hình vuông 90° cùng chiều kim đồng hồ quanh tâm quay P thì mỗi điểm trên hình vuông đều phải quay 90° cùng chiều kim đồng hồ.

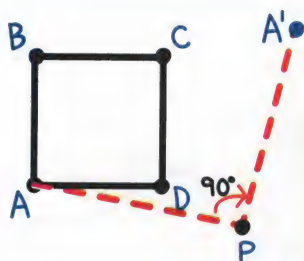


Khoảng cách từ A đến P bằng khoảng cách từ A' đến P.

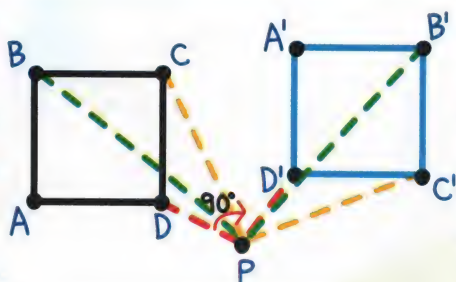
Vì $AP = A'P$ nên ta có thể coi là đoạn AP quay 90° cùng chiều kim đồng hồ.

Sử dụng thước đo góc để vẽ một góc 90° .

Xác định điểm A'.



Lặp lại quá trình trên với các đỉnh B, C và D. Sau đó nối các điểm ảnh lại.

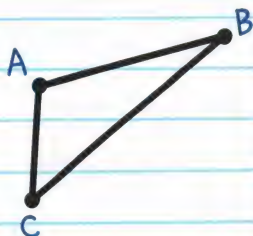


VÍ DỤ: Vẽ ảnh của $\triangle ABC$ quay 110° ngược chiều kim đồng hồ quanh điểm Q .

• Q

Ta vẽ phép quay từng đỉnh một bằng thước đo góc và thước kẻ.

Để quay điểm A :

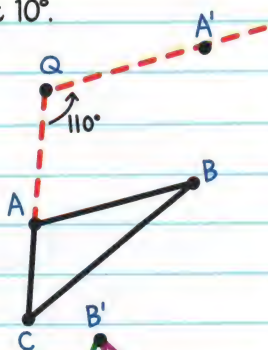


1. Vẽ đoạn thẳng từ Q đến A

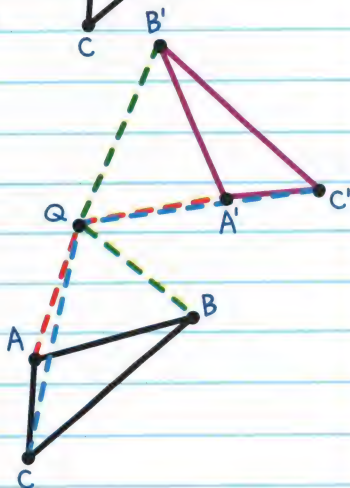
2. Sử dụng thước đo góc để vẽ góc 10° .

3. Đo độ dài \overline{QA} .

4. Vẽ trên cạnh vừa vẽ sao cho khoảng cách từ A' đến Q bằng khoảng cách từ A đến Q .



Quay các điểm B và C tương tự. Nối các điểm A' , B' , và C' .

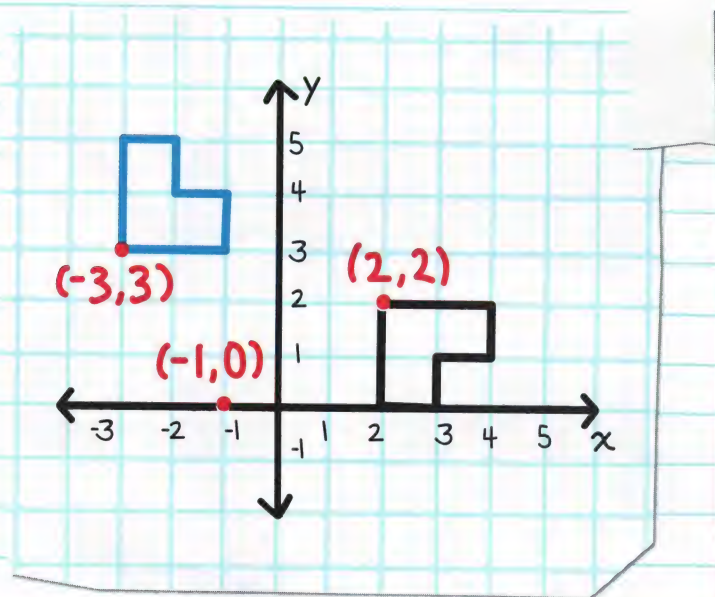


TÌM GÓC QUAY

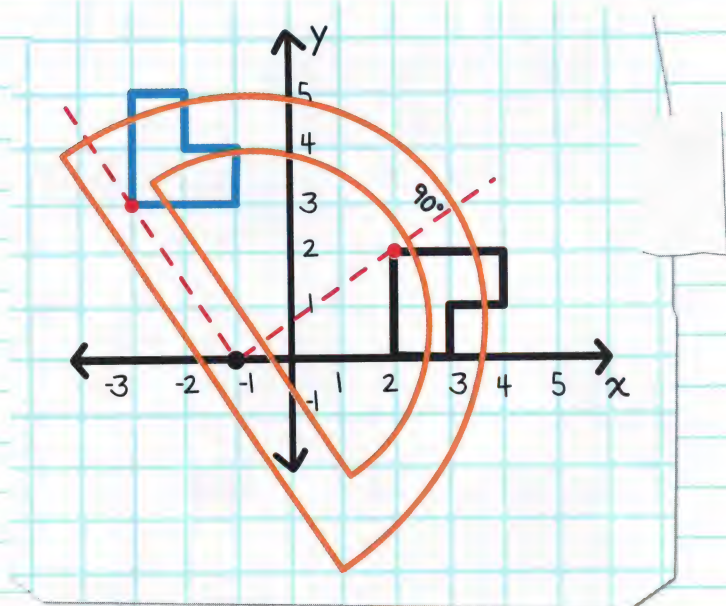
Ta có thể tìm góc quay bằng thước đo góc và thước kẻ.
Một hình vẽ được quay ngược chiều kim đồng hồ quanh một điểm có tọa độ $(-1, 0)$. Điểm $(2, 2)$ được quay thành $(-3, 3)$.

Để tìm góc quay:

1. Vẽ các đường thẳng từ tâm qua mỗi điểm $(2, 2)$ và $(-3, 3)$.



2. Sử dụng thước đo góc để đo độ lớn của góc vừa vẽ.



Góc quay bằng 90° .

PHÉP QUAY TRÊN MẶT PHẪNG TỌA ĐỘ

Ba góc quay thường được sử dụng trên mặt phẳng tọa độ là 90° , 180° , và 270° . Lấy gốc tọa độ làm tâm, các phép quay với các góc quay này có những công thức đặc biệt.

Gốc tọa độ là điểm $(0, 0)$. Đó là điểm trục hoành và trục tung gặp nhau.

**GÓC
QUAY**

CÔNG THỨC

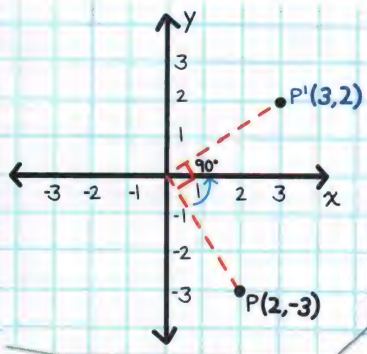
VÍ DỤ

ngược chiều kim đồng hồ
quanh gốc tọa độ

90°

$$(x, y) \rightarrow (-y, x)$$

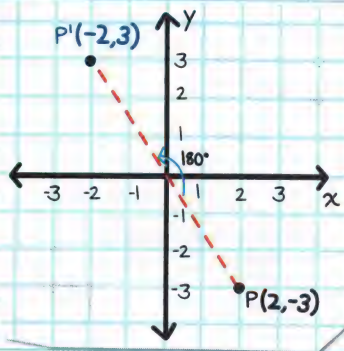
Nhân tung độ
với -1 và đảo vị
trí các tọa độ.



180°

$$(x, y) \rightarrow (-x, -y)$$

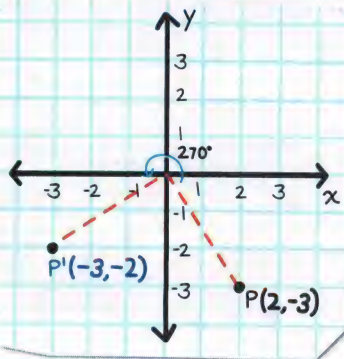
Nhân hoành độ
và tung độ với
 -1 .



270°

$$(x, y) \rightarrow (y, -x)$$

Nhân hoành độ
với -1 và đảo vị
trí các tọa độ.



VÍ DỤ: Quay tam giác đã cho
 180° quanh gốc tọa độ.

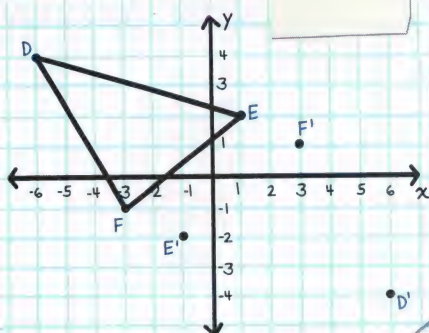
Đầu tiên ta quay mỗi đỉnh
 180° quanh gốc tọa độ:

Công thức: $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$

$D(-6, 4) \rightarrow D'(6, -4)$

$E(1, 2) \rightarrow E'(-1, -2)$

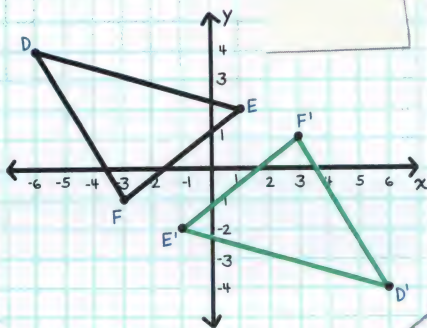
$F(-3, -1) \rightarrow F'(3, 1)$



Nhân các tọa độ
 x và y với -1

Tiếp theo xác định
các điểm mới.

Rồi nối các điểm mới lại



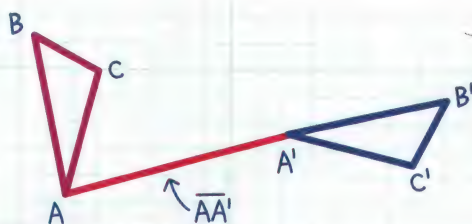
Khi quay 180° thì chiều quay cùng chiều kim đồng hồ hay ngược chiều kim đồng hồ không quan trọng, vì cuối cùng ta cũng thu được ảnh ở cùng vị trí.

TÌM TÂM CỦA PHÉP QUAY

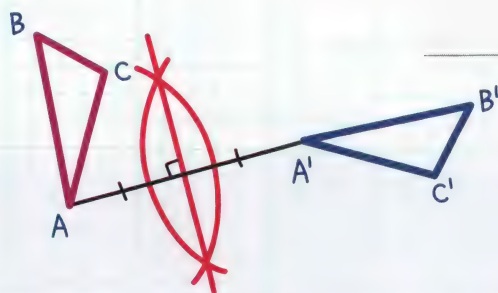
Các bước để tìm tâm của phép quay:



1. Vẽ đường thẳng nối A và A'

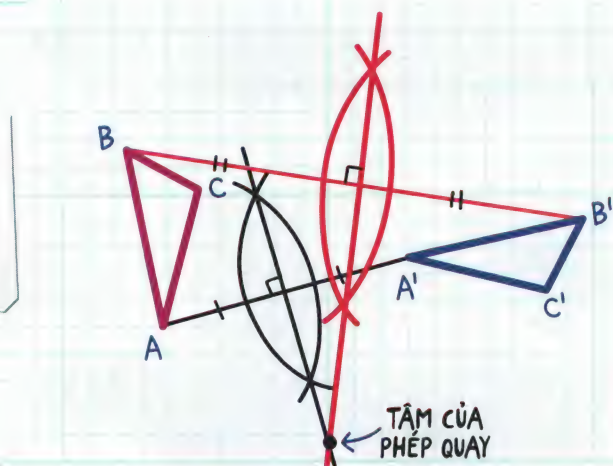


2. Dựng đường trung trực của $\overline{AA'}$



3. Lặp lại bước 1 và 2 với cặp điểm B và B'.

Giao điểm của hai đường trung trực chính là tâm của phép quay.



Nếu ta vẽ đường trung trực của $\overline{CC'}$ thì nó cũng đi qua điểm tâm của phép quay.

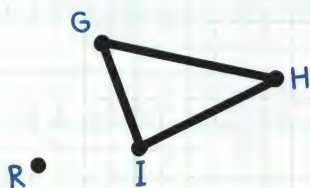


BÀI TẬP

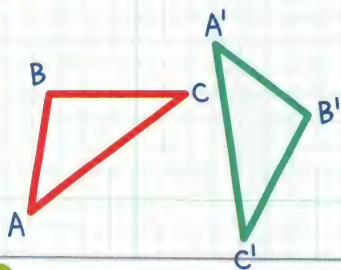
1. Đúng hay sai: Trong một phép quay, hình dạng, kích thước và chiều của hình vẽ được giữ nguyên.
2. Thực hiện phép quay tam giác đã cho 90° ngược chiều kim đồng hồ quanh tâm quay R.



3. Sử dụng thước đo góc để vẽ phép quay $\triangle GHI$ 60° ngược chiều kim đồng hồ quanh điểm R.

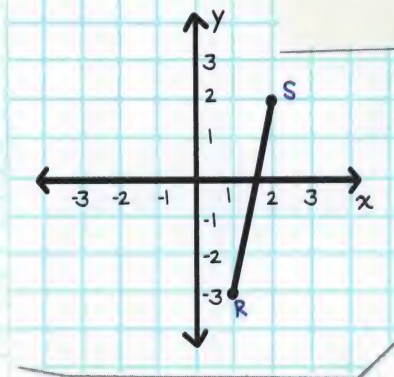


4. Vẽ tâm phép quay biến $\triangle ABC$ thành $\triangle A'B'C'$.



BÀI TẬP

Sử dụng hình vẽ dưới đây để trả lời câu 5 và 6:



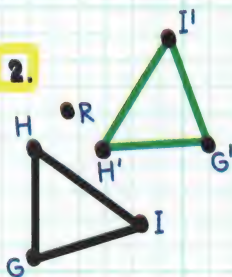
5. \overline{RS} quay 180° ngược chiều kim đồng hồ quanh gốc tọa độ. Tọa độ của R' và S' là gì?
6. Vẽ phép quay \overline{RS} 270° ngược chiều kim đồng hồ quanh gốc tọa độ.

LỜI GIẢI

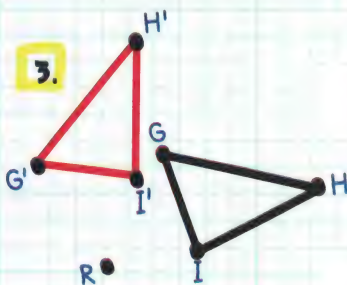
1. Sai. Kích thước và hình dạng giữ nguyên nhưng chiều của hình bị quay đi.



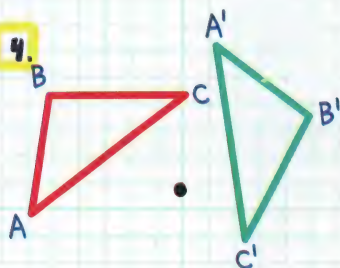
2.



3.



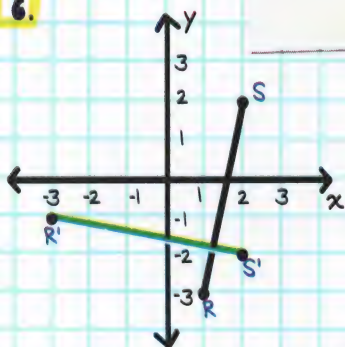
4.



5.

$$R'(-1, 3), S'(-2, -2)$$

6.



Chương 23

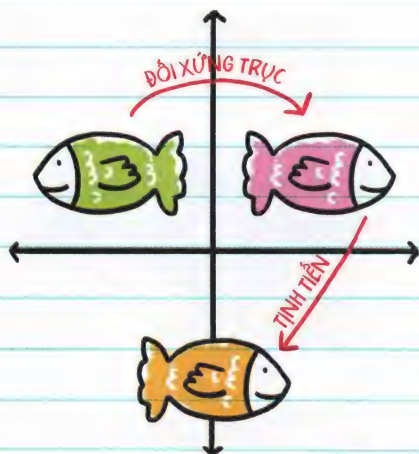
TÍCH CÁC PHÉP BIẾN HÌNH

TÍCH CÁC PHÉP BIẾN HÌNH

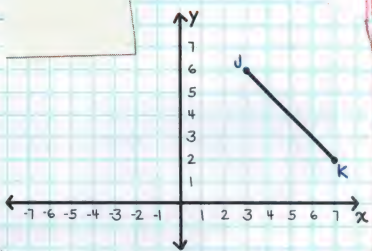
TÍCH CÁC PHÉP BIẾN HÌNH kết hợp từ hai phép biến hình trở lên để tạo thành phép biến hình mới.

Trong một tích các phép biến hình, ta tìm ảnh của phép biến hình trước rồi thực hiện phép biến hình tiếp theo trên ảnh vừa có.

Ví dụ về tích các phép biến hình: Con cá màu xanh đối xứng trục với con cá màu hồng, sau đó được tịnh tiến thành con cá màu vàng.



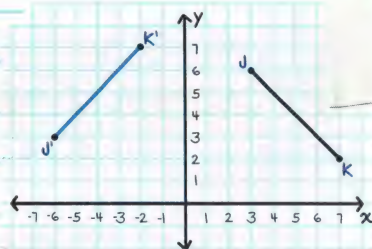
VÍ DỤ: Vẽ ảnh của \overline{JK} quay 90° ngược chiều kim đồng hồ quanh gốc tọa độ, sau đó đối xứng qua trục $y = 1$.



Bước 1: Quay \overline{JK} 90° ngược chiều kim đồng hồ quanh gốc tọa độ.

Sử dụng công thức $(x, y) \rightarrow (-y, x)$ để tìm các điểm đầu mút.

- $J(3, 6) \rightarrow J'(-6, 3)$
- $K(7, 2) \rightarrow K'(-2, 7)$



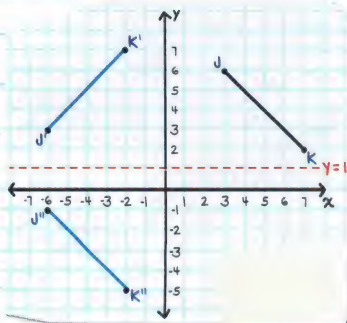
Nối các điểm đầu mút.

Bước 2: Lấy đối xứng của $\overline{J'K'}$ qua đường thẳng $y = 1$.

Ký hiệu các điểm bằng hai dấu phẩy (") khi ảnh của phép biến hình trước được lấy đối xứng.

J' cách phía trên trục $y = 1$ một khoảng là 2 đơn vị, vậy J'' cách phía dưới trục $y = 1$ một khoảng 2 đơn vị.

K' cách phía trên trục $y = 1$ một khoảng là 6 đơn vị, vậy K'' cách phía dưới trục $y = 1$ một khoảng 6 đơn vị.

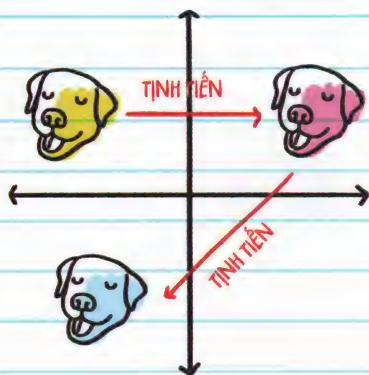


Nối các điểm đầu mút mới.

TÍCH CÁC PHÉP TÍNH TIẾN

TÍCH CÁC PHÉP TÍNH TIẾN kết hợp từ hai phép tính tiến trở lên.

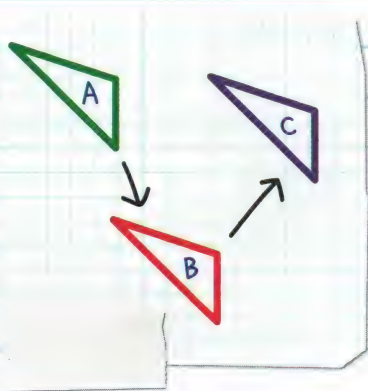
Ví dụ về tích các phép tính tiến là: Chú chó vàng được tính tiến thành chú chó hồng, rồi lại tính tiến tiếp thành chú chó xanh.



Trong hình vẽ này ta thấy:

$\triangle A$ được tính tiến thành $\triangle B$.

$\triangle B$ được tính tiến thành $\triangle C$.



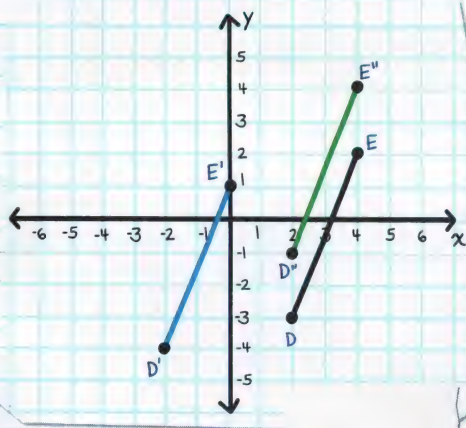
Tích của hai phép tính tiến là một phép tính tiến khác.

VÍ DỤ: Mô tả

phép biến hình \overline{DE}
thành $\overline{D''E''}$.

\overline{DE} được tịnh tiến
theo véc-tơ $(-4, -1)$
thành $\overline{D'E'}$.

$\overline{D'E'}$ được tịnh tiến
theo véc-tơ $(4, 3)$
thành $\overline{D''E''}$.



Đây là tích hai phép tịnh tiến, vậy nó cũng là một phép tịnh tiến.

Để tìm véc-tơ tịnh tiến, ta có thể làm theo một trong hai cách:

- Đếm số đơn vị từ D đến D'' (hoặc từ E đến E'') như sau:
 D di chuyển 0 đơn vị sang hai bên phải/trái và 2 đơn vị lên phía trên thành $D''(0, 2)$.

HOẶC

- Cộng các tọa độ của các véc-tơ tịnh tiến $(-4, -1)$ và $(4, 3)$ ta được:

$$(-4 + 4, -1 + 3) = (0, 2).$$

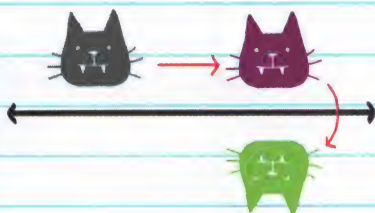
Phép biến hình \overline{DE} thành $\overline{D''E''}$ là phép tịnh tiến theo véc-tơ $(0, 2)$.

ĐỐI XỨNG TRƯỢT

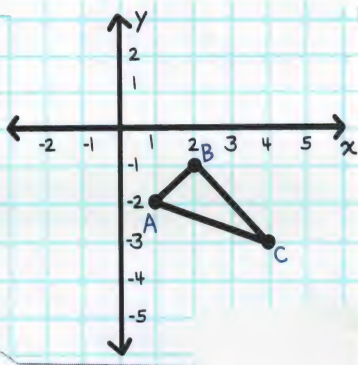
ĐỐI XỨNG TRƯỢT là một phép tịnh tiến rồi đến phép đối xứng trục. Trục đối xứng song song với chiều tịnh tiến.

Ví dụ về đối xứng trượt là:

Chú mèo xám tịnh tiến thành chú mèo tím, sau đó đối xứng trục thành chú mèo xanh lục.



VÍ DỤ: Vẽ phép đối xứng trượt trong đó $\triangle ABC$ là được tịnh tiến theo véc-tơ $(-4, 0)$ rồi đối xứng qua trục hoành.



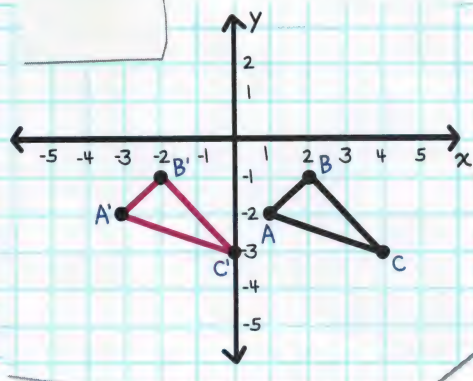
Tịnh tiến tam giác đã cho theo véc-tơ $(-4, 0)$ ta được:

$$A(1, -2) \rightarrow A'(-3, -2)$$

$$B(2, -1) \rightarrow B'(-2, -1)$$

$$C(4, -3) \rightarrow C'(0, -3)$$

Chấm các điểm vừa xác định ở trên rồi nối các đỉnh đó lại.

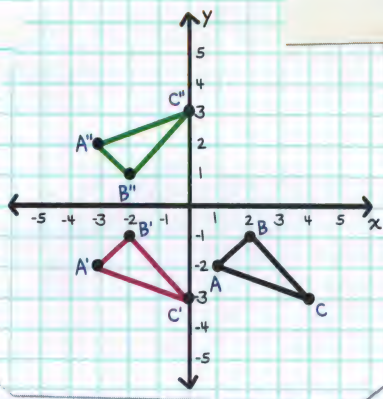


Đổi xứng trục $\Delta A'B'C'$
qua trục hoành ta được:

$$A'(-3, -2) \rightarrow A''(-3, 2)$$

$$B'(-2, -1) \rightarrow B''(-2, 1)$$

$$C'(0, -3) \rightarrow C''(0, 3)$$



Chấm các điểm vừa xác định ở trên rồi
nối các đỉnh đó lại.

CÁC TÍNH CHẤT CHÍNH CỦA CÁC PHÉP ĐỜI HÌNH

Tên phép dời hình	Kích thước có giữ nguyên không?	Số đo góc có giữ nguyên không?	Chiều của hình có giữ nguyên không?
Đổi xứng trục	Có	Có	Không
Tịnh tiến	Có	Có	Có
Quay	Có	Có	Không
Đổi xứng trượt	Có	Có	Không

TÍCH CÁC PHÉP ĐỐI XỨNG TRỰC

Tích các phép đối xứng trục có những công thức khác nhau phụ thuộc vào các trục đối xứng song song hay cắt nhau.

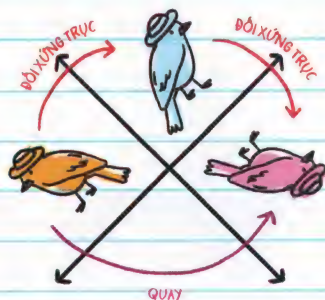
Song song

Tích của hai phép đối xứng trục qua hai đường thẳng song song tạo thành một phép tịnh tiến.



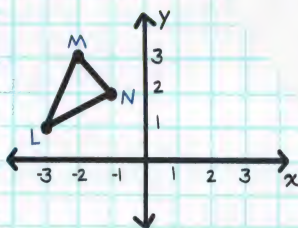
Cắt nhau

Tích của hai phép đối xứng trục qua hai đường thẳng cắt nhau tạo thành một phép quay quanh giao điểm.

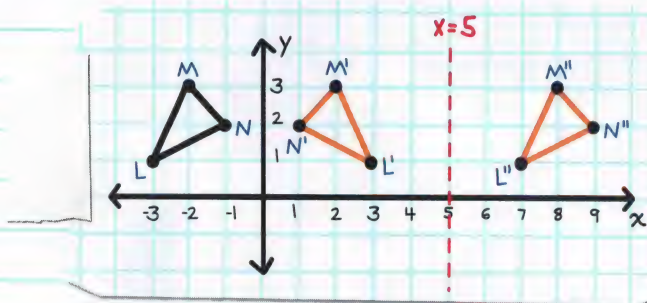


VÍ DỤ: Đối xứng $\triangle LMN$ qua trục tung sau đó đối xứng qua trục $x = 5$. Vậy phép biến hình nào biến

$\triangle LMN$ thành $\triangle L''M''N''$?



Đối xứng tam giác đã cho qua trục tung cho ta $\triangle L'M'N'$.



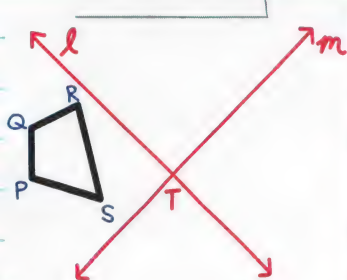
Đối xứng $\triangle L'M'N'$ qua trục $x = 5$ ta được $\triangle L''M''N''$.

$\triangle LMN$ di chuyển 10 đơn vị về phía bên phải thành $\triangle L''M''N''$. Do đó phép tịnh tiến theo véc-tơ $(10, 0)$ biến $\triangle LMN$ thành $\triangle L''M''N''$.

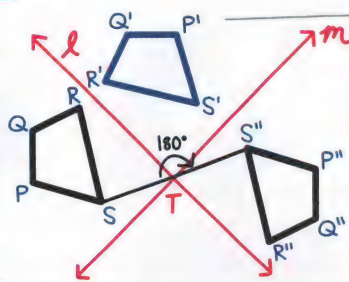
TRỤC TUNG VÀ $x = 5$
LÀ CÁC ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG. ĐỐI XỨNG TRỰC QUA HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG TẠO THÀNH MỘT PHÉP TỊNH TIẾN



VÍ DỤ: Đối xứng trục từ giác PQRS qua đường thẳng l rồi qua đường thẳng m . Vậy phép biến hình nào cho tương ứng PQRS thành $P''Q''R''S''$?



Đối xứng trục PQRS qua đường thẳng l cho ta hình $P'Q'R'S'$. Đối xứng trục $P'Q'R'S'$ qua đường thẳng m cho ta hình $P''Q''R''S''$.



Kết quả là một phép quay quanh điểm T.

Để tìm góc quay ta vẽ đường thẳng từ S tới T và S'' tới T. Góc giữa hai đường thẳng này bằng 180° .

Phép biến hình là một phép quay có tâm là T và góc quay bằng 180° .

ĐỐI XỨNG TRỤC QUA HAI ĐƯỜNG THẲNG CẮT NHAU TẠO THÀNH MỘT PHÉP QUAY QUANH GIAO ĐIỂM

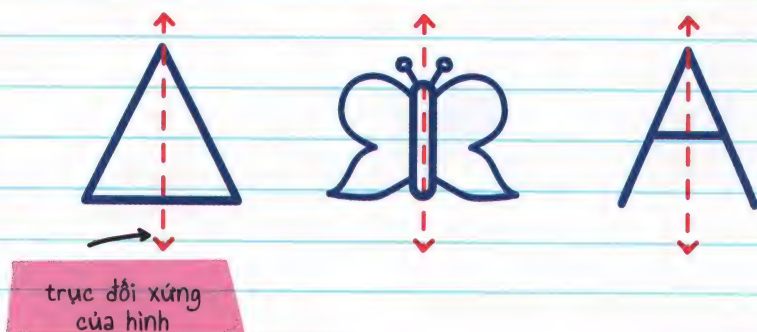


HÌNH ĐỐI XỨNG

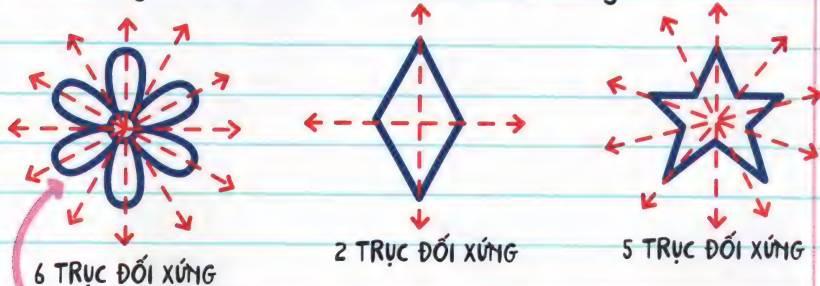
Nếu một hình đối xứng trục qua một đường thẳng tạo thành hình mới không thay đổi thì hình đó gọi là **HÌNH CÓ TRỤC ĐỐI XỨNG**.

Đường thẳng trong phép đối xứng trục được gọi là **TRỤC ĐỐI XỨNG CỦA HÌNH**.

Trục đối xứng của một hình chia hình đó thành hai ảnh như soi gương.



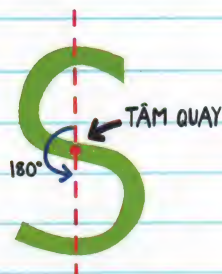
Có những hình có thể có nhiều trục đối xứng.



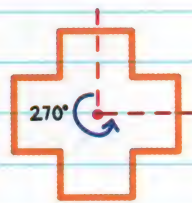
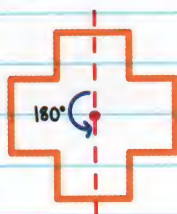
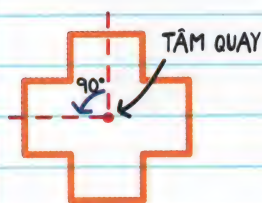
Có sáu đường thẳng khác nhau mà khi lấy đối xứng hình bông hoa qua các đường thẳng đó ta vẫn được một hình giống hệt.

Nếu một hình được quay 0° và 360° quanh tâm của nó mà hình vẫn không thay đổi thì hình đó được gọi là **HÌNH CÓ TÂM ĐỐI XỨNG**. Điểm tâm quay được gọi là **TÂM ĐỐI XỨNG CỦA HÌNH**.

Hình này có tâm đối xứng vì nó vẫn giống như cũ sau khi quay 180° , vòng quay nhỏ hơn một vòng tròn (360°).



Hình này có tâm đối xứng vì khi ta quay nó 90° , 180° , hay 270° thì hình vẫn giống hệt như cũ. Hình đó biến thành chính nó.

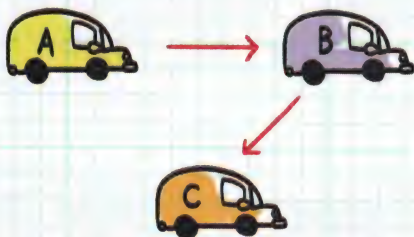




BÀI TẬP

1. Vẽ tích của hai phép biến hình, biến điểm $P(4, 1)$ thành điểm P' qua phép quay 270° ngược chiều kim đồng hồ quanh gốc tọa độ, sau đó đối xứng trục qua đường thẳng $y = -1$ thành điểm P'' .

2. Đúng hay sai: Nếu hình A tịnh tiến thành hình B và hình B tịnh tiến thành hình C thì hình A tương ứng với hình C cũng là một phép tịnh tiến.



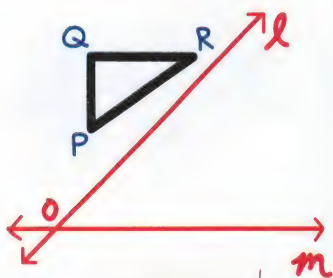
3. $\triangle GHI$ được tịnh tiến dọc véc-tơ $(7, -3)$ thành $\triangle G'H'I'$. $\triangle G'H'I'$ được tịnh tiến dọc véc-tơ $(-2, 13)$ thành $\triangle G''H''I''$. Hãy mô tả phép biến hình từ $\triangle GHI$ thành $\triangle G''H''I''$.

4. Tích của hai phép đối xứng trục qua hai đường thẳng song song là gì?

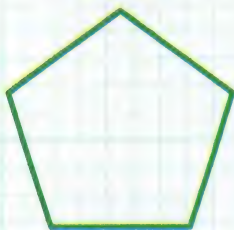
5. Hãy điền vào chỗ trống để hoàn thành câu sau:
Tích của hai phép đối xứng trục qua hai đường thẳng _____ tạo thành một phép quay quanh điểm _____.

BÀI TẬP

6. Vẽ phép đối xứng trục $\triangle PQR$ qua đường thẳng l sau đó đối xứng trục qua đường thẳng m . Hãy mô tả phép biến hình cho tương ứng $\triangle PQR$ thành $\triangle P''Q''R''$.

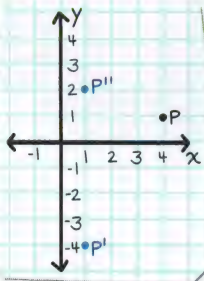


7. Hình đã cho có phải là hình đối xứng trục không? Nếu có, hãy cho biết nó có bao nhiêu trục đối xứng?



LỜI GIẢI

1.



2. Đúng



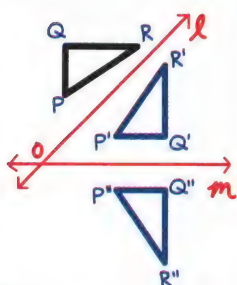
3. Tịnh tiến theo véc-tơ $(5, 10)$

Gợi ý: Cộng các tọa độ của véc-tơ tịnh tiến

4. Phép tịnh tiến

5. cắt nhau, giao điểm

6. Một phép quay có tâm O và góc quay bằng 270° ngược chiều kim đồng hồ (hoặc 90° cùng chiều kim đồng hồ).

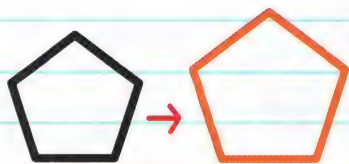


7. Có, 5 trục đối xứng

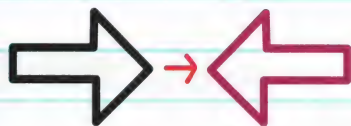
Chương 24

HÌNH BẰNG NHAU

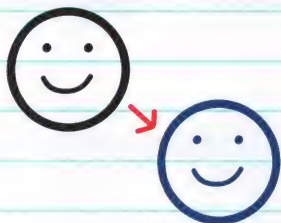
Hai hình **BẰNG NHAU** nếu tồn tại một chuỗi các phép dời hình cho tương ứng hình này trực tiếp thành hình kia.



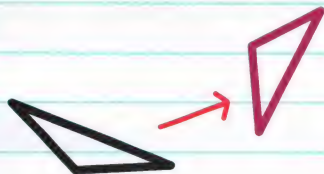
Không phải phép dời hình
(Độ dài cạnh lớn hơn)
→ Không bằng nhau



Tồn tại phép dời hình
(Đổi xứng trục)
→ Bằng nhau



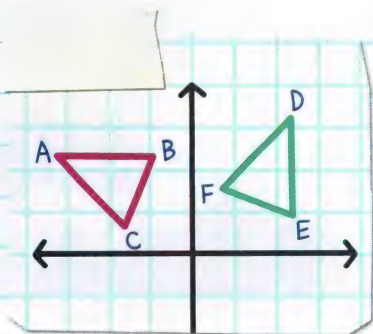
Tồn tại phép dời hình
(Tịnh tiến)
→ Bằng nhau



Không phải phép dời hình
(Các góc và độ dài cạnh
thay đổi)
→ Không bằng nhau

VÍ DỤ: $\triangle ABC$ có bằng
 $\triangle DEF$ không?

Nếu tồn tại phép dời hình
sao cho $\triangle ABC$ biến thành
 $\triangle DEF$ thì hai tam giác
bằng nhau.



Ta có phép quay 270° ngược chiều kim đồng hồ cho tương
ứng $\triangle ABC$ với $\triangle DEF$.

Do đó $\triangle ABC$ là bằng với $\triangle DEF$.

$\triangle ABC \cong \triangle DEF$

Thứ tự các chữ cái ký hiệu rất quan trọng khi ta viết
mệnh đề bằng nhau.

$\triangle ABC \cong \triangle DEF$ nghĩa là A tương ứng với D, B tương ứng
với E, và C tương ứng với F.

$\triangle ABC \cong \triangle EFD$ không đúng vì A không tương ứng với E.

Các mệnh đề tương đương với $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ là:

$$\triangle ACB \cong \triangle DFE$$

$$\triangle DEF \cong \triangle ABC$$

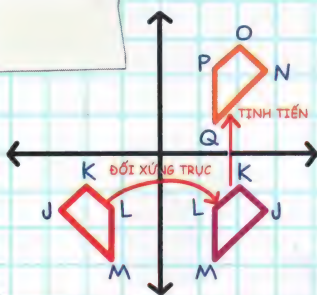
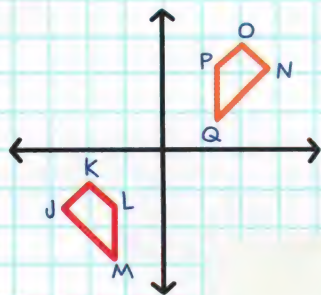
$$\triangle BAC \cong \triangle EDF$$

$$\triangle EDF \cong \triangle BAC$$

VÍ DỤ: Hãy cho biết hai hình đã cho có bằng nhau không. Nếu có hãy viết một mệnh đề bằng nhau.

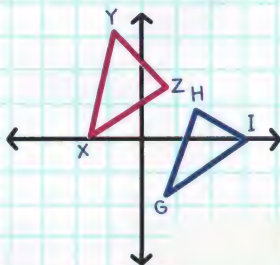
JKLM tương ứng với NOPQ vì có phép đối xứng qua trục tung, sau đó là phép tịnh tiến.

Vì tồn tại một chuỗi các phép dời hình cho tương ứng JKLM với NOPQ nên các hình đã cho bằng nhau. Mệnh đề bằng nhau là $JKLM \cong NOPQ$.



VÍ DỤ: Hãy cho biết $\triangle XYZ$ có bằng $\triangle GHI$ không.

Nếu ta vạch theo $\triangle XYZ$, thử các phép quay, đối xứng hoặc tịnh tiến thì ta sẽ thấy nó không thể cho tương ứng với $\triangle GHI$. Vì không tồn tại chuỗi các phép dời hình cho tương ứng $\triangle XYZ$ với $\triangle GHI$ nên hai tam giác này không bằng nhau.



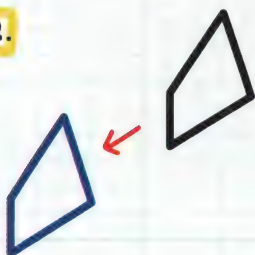


BÀI TẬP

1. Câu sau đúng hay sai: Hai hình bằng nhau nếu tồn tại một chuỗi các phép biến hình cho tương ứng hình này với hình kia.

Trong các câu 2 và 3, hãy cho biết các hình dưới đây có bằng nhau không.

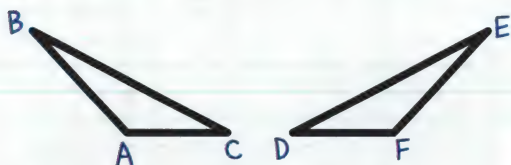
2.



3.



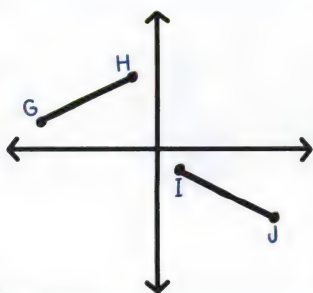
4. Viết một mệnh đề bằng nhau cho các hình bằng nhau sau đây:



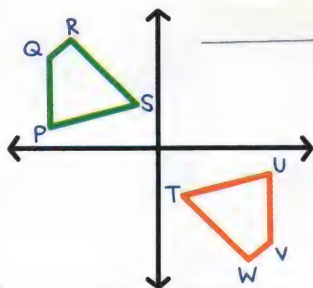
Với các câu từ 5-7, hãy cho biết các hình có bằng nhau không. Nếu có hãy viết một mệnh đề bằng nhau.

BÀI TẬP

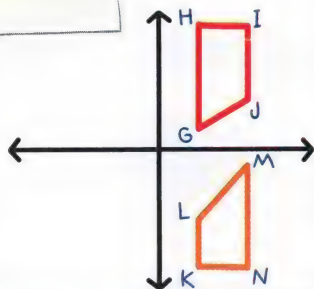
5.



6.



7.

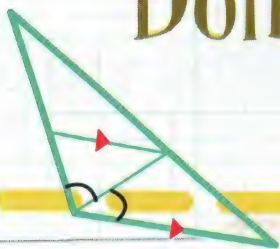


LỜI GIẢI



1. Sai. Hai hình bằng nhau nếu tồn tại một chuỗi các phép dời hình cho tương ứng hình này với hình kia. (Không phải tất cả các phép biến hình đều là phép dời hình).
2. Có. Tồn tại phép dời hình (tịnh tiến) cho tương ứng hình này với hình kia.
3. Không. Không tồn tại chuỗi các phép dời hình nào cho tương ứng đoạn thẳng này với đoạn thẳng kia.
4. $\triangle ABC \cong \triangle FED$ (hoặc $\triangle ACB \cong \triangle FDE$, $\triangle BAC \cong \triangle EFD$, $\triangle BCA \cong \triangle EDF$, $\triangle CAB \cong \triangle DFE$)
5. Có, $\overline{GH} \cong \overline{IJ}$ hoặc $\overline{HG} \cong \overline{JI}$
6. Có, $PQRS \cong UVWT$ (hoặc $QRSP \cong VWTU$, $RSPQ \cong WTUV$, $SPQR \cong TUVW$, $SRQP \cong TWVU$, $RQPS \cong WVUT$, $QPSR \cong VUTW$, $PSRQ \cong UTWV$)
7. Không. Không tồn tại chuỗi các phép dời hình nào cho tương ứng hình này với hình kia.

BÀI 6



Đồng dạng

Chương 25

TỶ SỐ VÀ TỶ LỆ THỨC

TỶ SỐ

TỶ SỐ là sự so sánh giữa hai hay nhiều đại lượng. Ta có thể viết tỷ số theo nhiều cách.

Khi so sánh a với b , ta có thể viết:

a trên b hoặc $a:b$ hoặc $\frac{a}{b}$

a đại diện cho đại lượng thứ nhất.

b đại diện cho đại lượng thứ hai.

Tỷ số 4 trên 8 có thể viết là 4 trên 8 hoặc $4:8$ hoặc $\frac{4}{8}$.

Chú ý: Ta có thể nhân hay chia a và b cho giá trị bất kỳ (trừ không) thì tỷ số a với b không thay đổi (tương đương).

Ví dụ, các tỷ số tương đương với $6:10$ là:

$18:30$	$3:5$	$120:200$	$6x:10x$	$\frac{6}{x}:\frac{10}{x}$
$(6 \times 3 : 10 \times 3)$	$\left(\frac{6}{2}:\frac{10}{2}\right)$	$(6 \times 20 : 10 \times 20)$	$(x \neq 0)$	$(x \neq 0)$

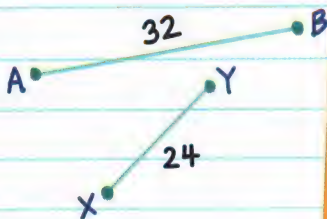
Các tỷ số cũng có thể được sử dụng để so sánh các số đo.

VÍ DỤ: Tỷ số giữa độ dài AB và độ dài XY là bao nhiêu?

Rút gọn

$$\frac{AB}{XY} = \frac{32}{24} = \frac{32 \div 8}{24 \div 8} = \frac{4}{3}$$

Tỷ số là 4 trên 3 hoặc 4:3 hoặc $\frac{4}{3}$.



Tỷ số mở rộng

TỶ SỐ MỞ RỘNG so sánh từ ba đại lượng trở lên.

Ta thường viết tỷ số mở rộng dưới dạng $a:b:c$.

VÍ DỤ: Một công thức làm bánh sô cô la cần 2 cốc đường, 1 cốc ca cao và 8 cốc sữa.

Hãy viết một tỷ số mở rộng cho các thành phần.

Ta cần bao nhiêu cốc mỗi loại nguyên liệu nếu làm gấp đôi công thức trên?

Tỷ số của đường với ca cao với sữa là $2:1:8$.

Để làm gấp đôi công thức trên, ta nhân mỗi giá trị với 2.

$$2 \cdot 2 = 4$$

$$1 \cdot 2 = 2$$

$$8 \cdot 2 = 16$$

Vậy tỷ số cho phần công thức gấp đôi là $4:2:16$.

Ta cần 4 cốc đường, 2 cốc ca cao và 16 cốc sữa để làm gấp đôi phần công thức đã nêu.

TỶ LỆ THỨC

TỶ LỆ THỨC là một phương trình giữa hai tỷ số bằng nhau.

Ta có thể viết tỷ lệ thức là $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ hoặc $a:b = c:d$

Ví dụ $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

Trong tỷ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ nếu ta nhân $a \cdot d$ và $b \cdot c$ thì được hai biểu thức bằng nhau.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$ad = bc$$

Hai tỷ số tạo thành một tỷ lệ thức được gọi là **PHÂN SỐ TƯƠNG ĐƯƠNG**

Ta có thể kiểm tra hai tỷ số có tạo thành tỷ lệ thức hay không bằng cách sử dụng **TÍCH CHÉO**. Để tìm các tích chéo, ta đặt hai tỷ số cạnh nhau rồi nhân hai đường chéo. Nếu cả hai tích bằng nhau thì hai tỷ số bằng nhau và tạo thành tỷ lệ thức.

Ví dụ, $\frac{2}{3} \times \frac{8}{12}$

đây được gọi là nhân chéo

$$2 \times 12 = 24$$

$$3 \times 8 = 24$$

tích chéo

Ta thấy các tích chéo bằng nhau, vậy $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$.

VÍ DỤ: Các tỷ số $\frac{3}{4}$ và $\frac{5}{6}$ có tạo thành tỷ lệ thức không?

Ta nhân: $\frac{3}{4} \times \frac{5}{6}$

$$3 \times 6 = 18$$

$$5 \times 4 = 20$$

Các tích chéo là 18 và 20.

$$18 \neq 20$$

Ta thấy các tích chéo không bằng nhau, vậy $\frac{3}{4} \neq \frac{5}{6}$.

Ta cũng có thể sử dụng tỷ lệ thức để tìm một đại lượng chưa biết. Ký hiệu x là đại lượng chưa biết.

VÍ DỤ: Giải phương trình: $\frac{3}{4} = \frac{x}{12}$

$$\frac{3}{4} \times \frac{x}{12}$$

nhân chéo

Ta có $3 \cdot 12 = 4 \cdot x$

$$36 = 4x$$

$$\frac{36}{4} = \frac{4x}{4}$$

$$x = 9$$

Vậy tỷ lệ thức là $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$

VÍ DỤ: Giải phương trình: $\frac{5}{6} = \frac{15}{2x}$

$$\frac{5}{6} \quad \frac{15}{2x}$$

nhân chéo

$$5 \cdot 2x = 6 \cdot 15$$

$$10x = 90$$

$$x = 9$$

Tỷ lệ thức là $\frac{5}{6} = \frac{15}{18}$

THỬ LẠI:

$$\frac{15}{2x} = \frac{15}{2(9)} = \frac{15}{18} = \frac{15 \div 3}{18 \div 3} = \frac{5}{6} \quad \checkmark$$

VÍ DỤ: Trung bình cứ lái xe 19 dặm thì Tim tiêu tốn 3 đô-la tiền xăng. Tim lên kế hoạch đi một chuyến theo một tuyến đường dài 570 dặm. Hỏi anh ấy phải tiêu tốn bao nhiêu tiền xăng?

Ta viết một tỷ lệ thức so sánh giá tiền xăng với số dặm đường.

trung bình

chuyến đi

$$\frac{3 \text{ đô-la}}{19 \text{ dặm}} = \frac{x \text{ đô-la}}{570 \text{ dặm}}$$

xăng

dặm đường

$$3 \cdot 570 = 19 \cdot x$$

$$1710 = 19x$$

$$x = 90$$

Vậy Tim cần chuẩn bị 90 đô-la tiền xăng..





BÀI TẬP

Tìm giá trị của x .

1. $\frac{3}{2x} = \frac{9}{24}$

2. $\frac{3}{15} = \frac{x}{25}$

3. $-\frac{5}{8} = \frac{20}{4x}$

4. $\frac{7x}{14} = 1$

5. Chiều dài trung bình của chi khủng long Brachiosaurus là 84 foot còn chi khủng long Velociraptor là 6 foot. Josh có một con khủng long Brachiosaurus đồ chơi dài 28 inch. Hỏi bạn ấy nên mua con khủng long đồ chơi Velociraptor dài bao nhiêu để kích thước tỷ lệ với với con Brachiosaurus đã có?

6. Grey tia 6 bụi hồng trong vòng 16 phút. Hỏi bạn ấy cần bao nhiêu thời gian để tia 30 bụi hồng?

LỜI GIẢI



1. $3 \cdot 24 = 9 \cdot 2x$; vậy $x = 4$

2. $3 \cdot 25 = x \cdot 15$; vậy $x = 5$

3. $-5 \cdot 4x = 20 \cdot 8$; vậy $x = -8$

4. $7x \cdot 1 = 14 \cdot 1$; vậy $x = 2$

5. $\frac{84}{6} = \frac{28}{x}$; vậy con khủng long dài 2 inch.

6. $\frac{16}{6} = \frac{x}{30}$; vậy bạn ấy sẽ cần 80 phút.

Chương 26

PHÉP ĐỒNG DẠNG

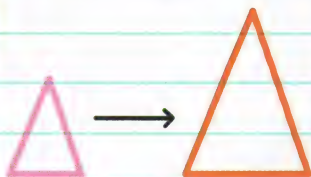
TỶ SỐ ĐỒNG DẠNG

PHÉP ĐỒNG DẠNG là một phép biến hình nhưng không phải phép dời hình.

Phép đồng dạng thay đổi kích cỡ của hình. Hình dạng của hình không thay đổi.

Phép đồng dạng có thể là:

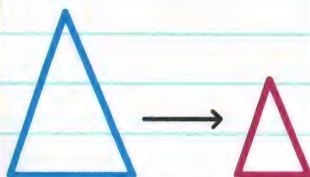
phóng to
hay phóng đại -
ảnh lớn hơn
hình gốc



HÌNH GỐC → ẢNH

HOẶC

thu nhỏ -
ảnh nhỏ hơn
hình gốc



HÌNH GỐC → ẢNH

Phép đồng dạng có một tâm là 0, đó là một điểm cố định. Tất cả các điểm mở rộng hay co lại từ điểm tâm theo **TỶ SỐ ĐỒNG DẠNG**.

Vị trí từ đó mà tất cả các điểm co lại hoặc mở rộng

TỶ SỐ ĐỒNG DẠNG (r)

một tỷ số xác định ảnh lớn hơn hay nhỏ hơn bao nhiêu so với hình gốc.

Khi ta phóng to một hình, tỷ số đồng dạng lớn hơn 1.

Khi ta thu nhỏ một hình, tỷ số đồng dạng nhỏ hơn 1.
(Hình đồng dạng mới sẽ bằng một phần của hình gốc)

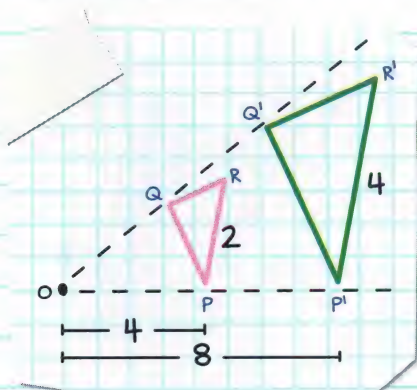
Tỷ số đồng dạng bằng 1 nghĩa là hình vẫn giữ nguyên kích cỡ: 100%. Tỷ số đồng dạng bằng 2 nghĩa là hình to lên gấp đôi.



Tìm tỷ số đồng dạng

Ta có thể tìm tỷ số đồng dạng từ tỷ số giữa chiều dài các cạnh tương ứng của hai hình.

VÍ DỤ: Tìm tỷ số đồng dạng.



Cách 1

Chia độ dài cạnh của ảnh, $\triangle P'Q'R'$ cho độ dài cạnh tương ứng trong hình gốc, $\triangle PQR$:

Tỷ số đồng dạng

$$r = \frac{P'R'}{PR} = \frac{4}{2} = 2$$

Vậy tỷ số đồng dạng $r = 2$

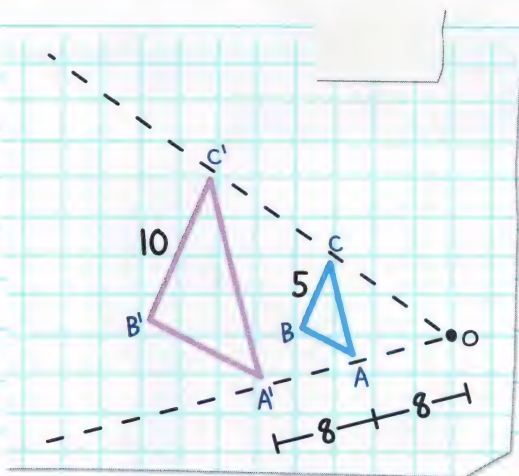
Cách 2

Chia khoảng cách từ tâm O đến P cho khoảng cách từ O đến P'.

$$r = \frac{OP'}{OP} = \frac{8}{4} = 2$$

Đừng quên rút gọn

VÍ DỤ: $\triangle ABC$ tương ứng với $\triangle A'B'C'$ (qua phép đồng dạng). Hãy tìm tỷ số đồng dạng.



Cách 1

Tìm tỷ số giữa độ dài các cạnh tương ứng:

$$r = \frac{B'C'}{BC}$$

$$r = \frac{10}{5} = 2$$

Cách 2

Tìm tỷ số giữa các khoảng cách từ tâm đến các điểm:

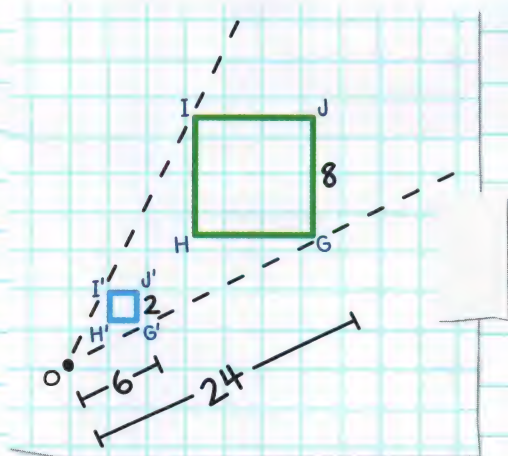
$$r = \frac{OA'}{OA}$$

$$r = \frac{8+8}{8} = \frac{16}{8}$$

$$r = 2$$

Vậy tỷ số đồng dạng $r = 2$
 Ảnh phóng to từ hình gốc.

VÍ DỤ: Tứ giác $GHIJ$ tương ứng với $G'H'I'J'$ (qua phép đồng dạng). Hãy tìm tỷ số đồng dạng.



Cách 1

Tìm tỷ số giữa độ dài các cạnh tương ứng:

$$r = \frac{G'J'}{GJ}$$

$$r = \frac{2}{8}$$

$$r = \frac{1}{4}$$

Tỷ số đồng dạng = $\frac{1}{4}$

Cách 2

Tìm tỷ số giữa các khoảng cách từ tâm đến các điểm:

$$r = \frac{O'G'}{OG}$$

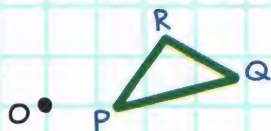
$$r = \frac{6}{24}$$

$$r = \frac{1}{4}$$

Vậy tỷ số đồng dạng là $\frac{1}{4}$. Ảnh thu nhỏ từ hình gốc.

VẼ HÌNH ĐỒNG DẠNG

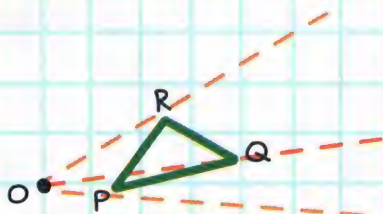
VÍ DỤ: Vẽ ảnh của $\triangle PQR$ qua phép đồng dạng tâm O và tỷ số đồng dạng bằng 3.



Bước 1: Vẽ các tia từ O đi qua mỗi đỉnh.

Bước 2: Vẽ P' .

Sử dụng thước và com-
pa để đo độ dài OP .



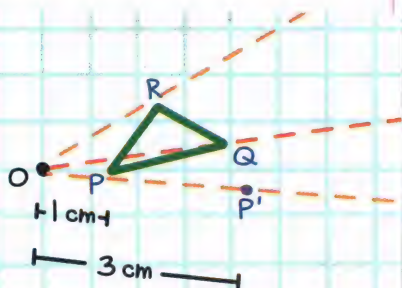
$$OP = 1 \text{ cm}$$

Nhân OP với tỷ số đồng dạng 3 ta được OP' .

$$3 \cdot OP = 3 \cdot (1 \text{ cm}) = 3 \text{ cm}$$

$$OP' = 3 \text{ cm}$$

Trên tia OP vẽ điểm
 P' cách điểm O 3cm.

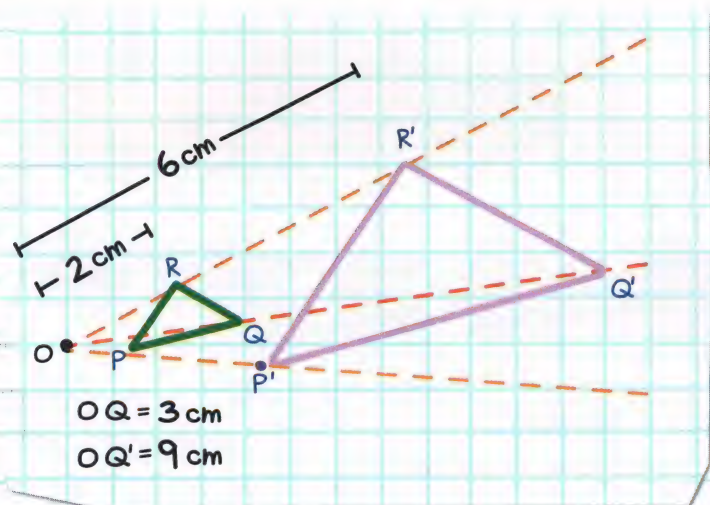


Bước 3: Lập lại bước 2 với các điểm Q và R.

$$OR' = 3 \cdot OR = 3 \cdot (2 \text{ cm}) = 6 \text{ cm}$$

$$OQ' = 3 \cdot OQ = 3 \cdot (3 \text{ cm}) = 9 \text{ cm}$$

Bước 4: Nối các điểm để vẽ tam giác mới.



Các cạnh tương ứng qua phép đồng dạng song song với nhau miễn là chúng không đi qua tâm O .

Vậy $QP \parallel Q'P'$, $QR \parallel Q'R'$, và $PR \parallel P'R'$.

PHÉP ĐỒNG DẠNG TRÊN MẶT PHẪNG TOẠ ĐỘ

Để tìm ảnh của phép đồng dạng trên mặt phẳng toạ độ có tâm ở gốc toạ độ $(0, 0)$, ta nhân mỗi hoành độ và tung độ với tỷ số đồng dạng r .

$$P(x, y) \rightarrow P'(rx, ry)$$

Nếu tồn tại phép đồng dạng tỷ số r thì $P(x, y)$ đồng dạng với $P'(rx, ry)$.

VÍ DỤ: $P(3, 2)$ tương ứng với P' qua phép đồng dạng tỷ số $\frac{3}{2}$ và tâm ở gốc toạ độ.

Hãy tìm toạ độ của P' .

$$P(x, y) \rightarrow P'(rx, ry)$$

hoành độ

$$P(3, 2) \rightarrow P'\left(\frac{3}{2} \cdot 3, \frac{3}{2} \cdot 2\right)$$

tung độ

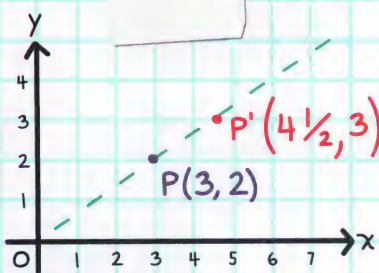
tỷ số đồng dạng

$$\frac{3}{2} \cdot 3 = \frac{9}{2}$$

$$\frac{3}{2} \cdot 2 = 3$$

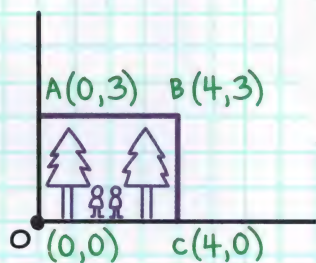
$$P'(\frac{9}{2}, 3) \quad \text{Rút gọn.}$$

$$P'(4\frac{1}{2}, 3)$$



VÍ DỤ: Catherine đang sửa một bức tranh trên máy vi tính. Phần mềm sửa ảnh hiển thị ảnh dưới dạng lưới. Cô ấy phóng to chiều cao của bức ảnh lên 200% qua một phép đồng dạng tâm O. Hỏi toạ độ của các đỉnh sau khi phóng to là bao nhiêu?

Bức ảnh được phóng to 200% nghĩa là tỷ số đồng dạng bằng 2.



Vậy toạ độ mới là:

$$A(0, 3) \rightarrow A'(2 \cdot 0, 2 \cdot 3)$$

toạ độ mới $A'(0, 6)$

$$B(4, 3) \rightarrow B'(2 \cdot 4, 2 \cdot 3)$$

toạ độ mới $B'(8, 6)$

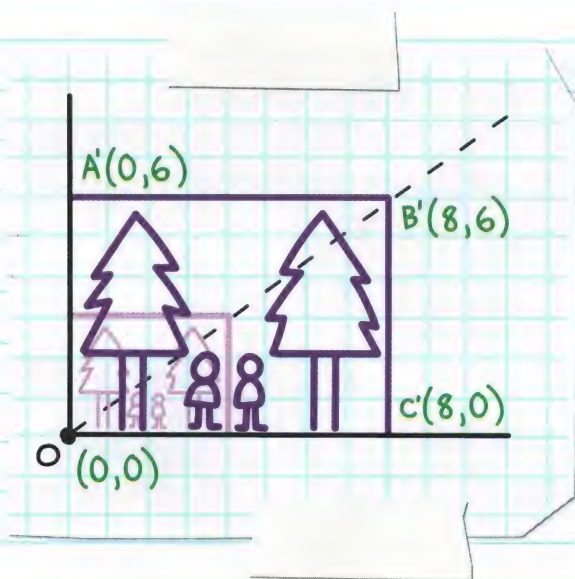
$$C(4, 0) \rightarrow C'(2 \cdot 4, 2 \cdot 0)$$

toạ độ mới $C'(8, 0)$

$$O(0, 0) \rightarrow O'(2 \cdot 0, 2 \cdot 0)$$

toạ độ mới $O'(0, 0)$

Tâm của phép đồng dạng
tương ứng với chính nó

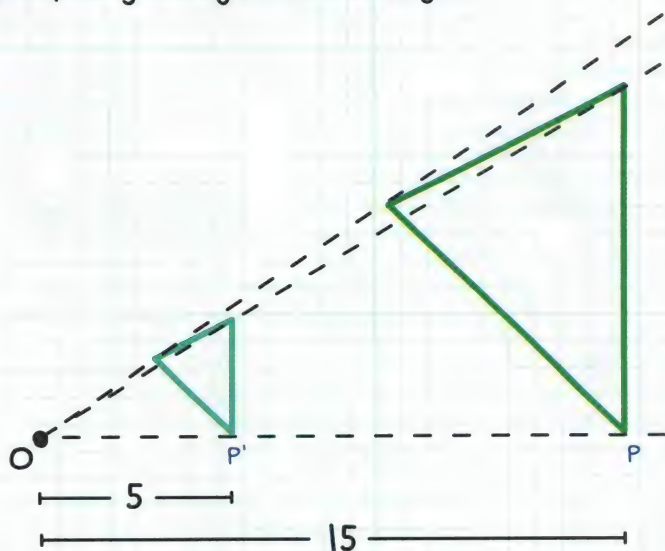


BÀI TẬP

1. Hãy cho biết mỗi câu sau đúng hay sai:
- A. Phép đồng dạng là phép dời hình.
 - B. Phép đồng dạng là phép biến hình.
 - C. Phép đồng dạng giữ nguyên hình dạng nhưng kích cỡ thì không.
 - D. Phép đồng dạng cho tương ứng một đường thẳng với một đường thẳng song song.

Từ câu 2-5 hãy tìm tỷ số đồng dạng của phép đồng dạng tâm O biến P thành P' . Hãy cho biết phép đồng dạng đó phóng to hay thu nhỏ hình gốc.

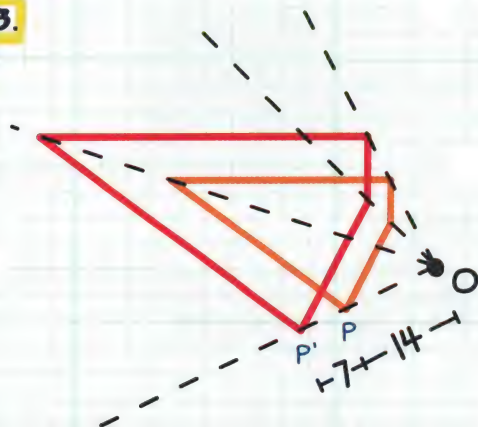
2.





BÀI TẬP

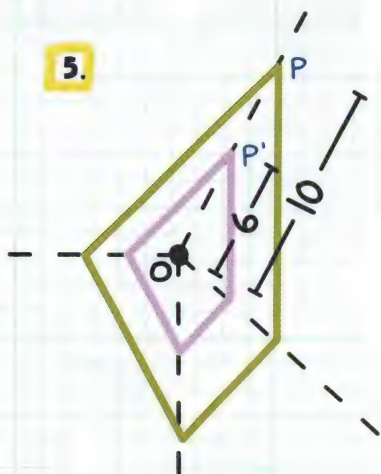
3.



4.



5.

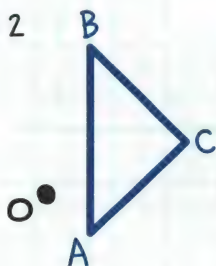


BÀI TẬP

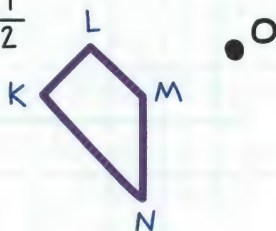
Với hai câu 6 và 7, hãy vẽ lại hình đã cho và điểm O.

Sau đó vẽ phép đồng dạng hình đó qua điểm O với tỷ số đồng dạng r cho trước.

6. $r = 2$

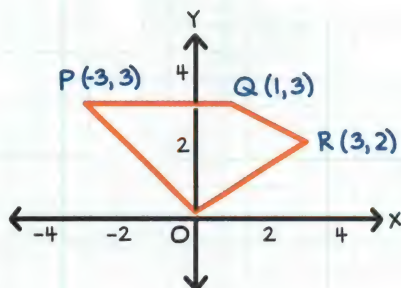


7. $r = \frac{1}{2}$



8. $P(4, 3)$ tương ứng với P' qua phép đồng dạng tỷ số 4 và tâm ở gốc tọa độ. Hỏi tọa độ của P' là bao nhiêu?

9. Tứ giác $OPQR$ tương ứng với $O'P'Q'R'$ qua phép đồng dạng tỷ số $\frac{1}{3}$ và tâm ở gốc tọa độ. Hãy tìm tọa độ của các đỉnh sau phép đồng dạng.



10. Vẽ phép đồng dạng $OPQR$ ở câu 9.

LỜI GIẢI



1. A. Sai

B. Đúng

C. Đúng

D. Đúng

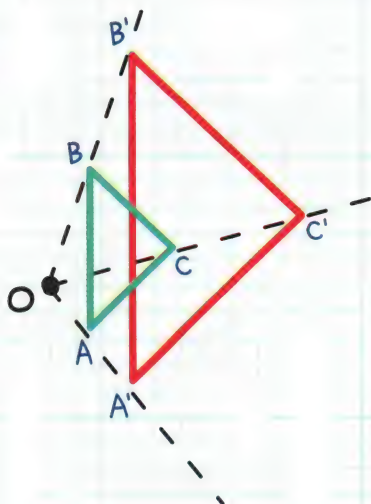
2. $\frac{1}{3}$, thu nhỏ

3. $\frac{3}{2}$, phóng to

4. 2, phóng to

5. $\frac{3}{5}$, thu nhỏ

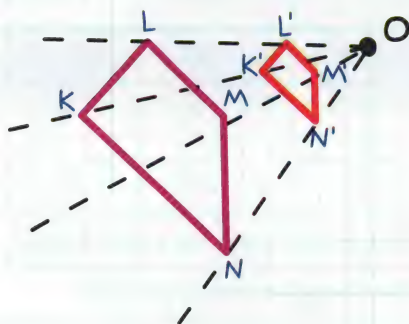
6.



LỜI GIẢI



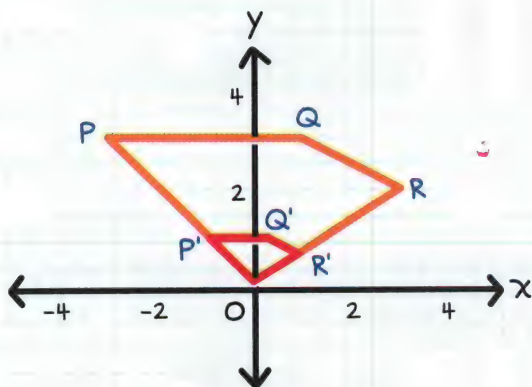
7.



8. $P'(16, 12)$

9. $O'(0, 0)$, $P'(-1, 1)$, $Q'(\frac{1}{3}, 1)$, $R'(1, \frac{2}{3})$

10.



Chương 27

HÌNH ĐỒNG DẠNG

Hai hình **ĐỒNG DẠNG** nếu chúng có cùng hình dạng nhưng không cần phải cùng kích cỡ.

HÌNH ĐỒNG DẠNG CHÍNH LÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG, NHƯNG CŨNG CÓ THỂ XOAY, TÍNH TIẾN HOẶC ĐỐI XỨNG TRÚC

Các hình đồng dạng có:

GÓC TƯƠNG ỨNG (các góc ở cùng vị trí tương đối trên mỗi hình) bằng nhau,

và

CẠNH TƯƠNG ỨNG (các cạnh ở cùng vị trí tương đối trên mỗi hình) tỷ lệ về độ lớn.



Hình
đồng dạng

ĐA GIÁC ĐỒNG DẠNG

Hai đa giác **ĐỒNG DẠNG** nếu tất cả các góc tương ứng bằng nhau và tất cả các cạnh tương ứng tỷ lệ.

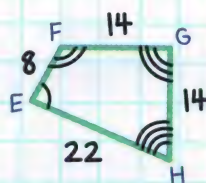
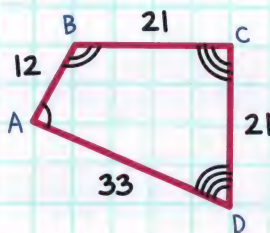
VÍ DỤ: Các đa giác sau đồng dạng bởi vì chúng có các góc bằng nhau ...

$$\angle A \cong \angle E$$

$$\angle C \cong \angle G$$

$$\angle B \cong \angle F$$

$$\angle D \cong \angle H$$



... và các cạnh tương ứng tỷ lệ.

$$\frac{AB}{EF} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{CD}{GH} = \frac{21}{14} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{BC}{FG} = \frac{21}{14} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{AD}{EH} = \frac{33}{22} = \frac{3}{2}$$

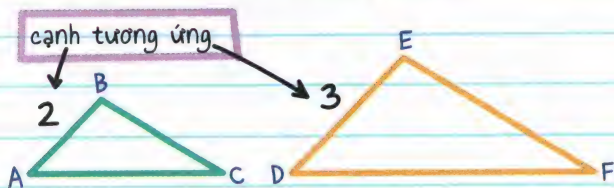
Ký hiệu đồng dạng là (\sim) .

Mệnh đề đồng dạng là $ABCD \sim EFGH$.

Chú ý: Thứ tự các chữ cái ký hiệu trong mệnh đề đồng dạng rất quan trọng.

Khi ta viết $ABCD \sim EFGH$ theo thứ tự đó bởi vì $\angle A \cong \angle E$, $\angle B \cong \angle F$, $\angle C \cong \angle G$, và $\angle D \cong \angle H$

TỶ SỐ ĐỒNG DẠNG của hai đa giác đồng dạng là tỷ số giữa độ dài các cạnh tương ứng.

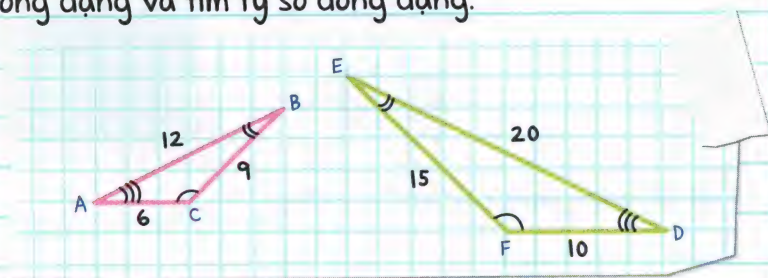


Nếu $\triangle ABC \sim \triangle DEF$,

tỷ số đồng dạng của $\triangle ABC$ với $\triangle DEF$ là $\frac{2}{3}$.

tỷ số đồng dạng của $\triangle DEF$ với $\triangle ABC$ là $\frac{3}{2}$.

VÍ DỤ: Hãy cho biết các tam giác sau có đồng dạng hay không. Nếu chúng đồng dạng, hãy viết mệnh đề đồng dạng và tìm tỷ số đồng dạng.



Hai tam giác đồng dạng vì chúng có các góc bằng nhau ...

$$\angle A \cong \angle D$$

$$\angle B \cong \angle E$$

$$\angle C \cong \angle F$$

... và các cạnh tương ứng tỷ lệ.

Cạnh dài nhất: $\frac{AB}{DE} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

Cạnh ngắn nhất: $\frac{AC}{DF} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

Cạnh còn lại: $\frac{BC}{EF} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$

Trong tam giác,
các cạnh tương
ứng cùng kề
với hai cặp góc
tương ứng

Khi chiều của các hình khác nhau, ta có thể so sánh tỷ lệ của các cạnh dài nhất và ngắn nhất để xác định đúng các cặp cạnh tương ứng.

Mệnh đề đồng dạng là:

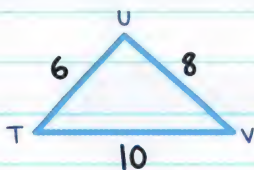
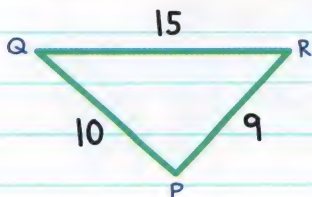
$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$

Tỷ số đồng dạng của $\triangle ABC$ với $\triangle DEF$ là $\frac{3}{5}$.

Nếu tỷ số của độ dài các cạnh tương ứng không bằng nhau thì các đa giác không đồng dạng.



VÍ DỤ: $\triangle PQR$ không đồng dạng với $\triangle TUV$. Bởi vì độ dài các cạnh tương ứng không tỷ lệ.



Cạnh dài nhất: $\frac{QR}{TV} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$

Cạnh ngắn nhất: $\frac{RP}{TU} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

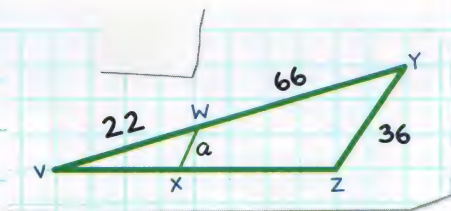
Cạnh còn lại: $\frac{PQ}{UV} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

$\frac{5}{4} \neq \frac{3}{2}$

Nếu ta biết hai hình là hình đồng dạng thì ta có thể sử dụng tỷ lệ của chúng để tìm các độ đo chưa biết.

VÍ DỤ: $\triangle VWX \sim \triangle VYZ$. Hãy tìm giá trị của a .

Vì hai tam giác đồng dạng nên độ dài các cạnh tỷ lệ:



$$\frac{VW}{VY} = \frac{WX}{YZ}$$

$$\frac{22}{22+66} = \frac{a}{36}$$

$$\frac{22}{88} = \frac{a}{36}$$

$$\frac{1}{4} \xrightarrow{\text{rút gọn}} \frac{a}{36}$$

Rút gọn $\frac{22}{88}$ thành $\frac{1}{4}$.

$$1 \cdot 36 = 4 \cdot a$$

$$36 = 4a$$

$$a = \frac{36}{4}$$

$$a = 9$$

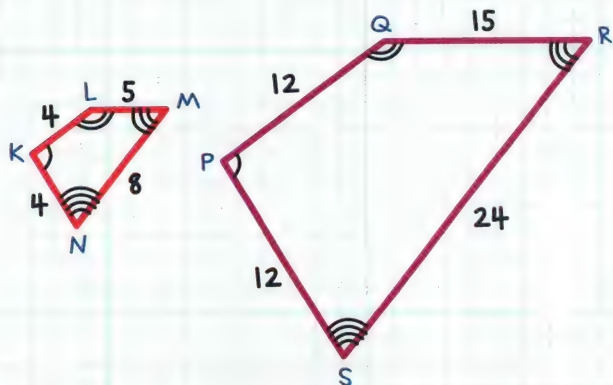
CÁI GÌ? CHÚNG ĐỒNG DẠNG.



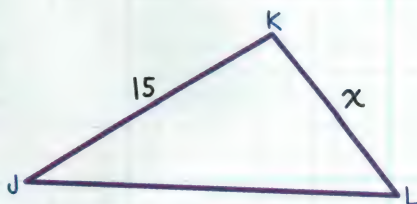
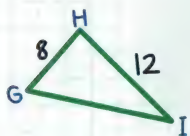


BÀI TẬP

- Hãy cho biết mỗi câu sau đúng hay sai:
 - Các hình đồng dạng có các góc tương ứng bằng nhau.
 - Các hình đồng dạng có các cạnh tương ứng bằng nhau.
- Viết mệnh đề đồng dạng cho các đa giác đồng dạng trong hình đã cho.



- Tỷ số đồng dạng của KLMN với PQRS trong câu 2 là bao nhiêu?
- Tìm giá trị của x . $\triangle GHI \sim \triangle LKJ$

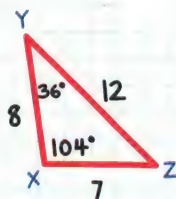
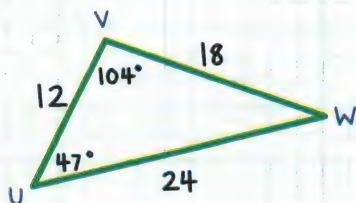




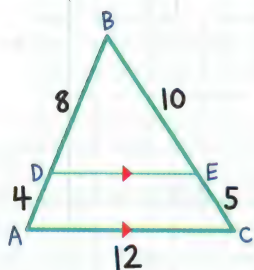
BÀI TẬP

Từ câu 5-7 hãy cho biết các đa giác sau có đồng dạng không. Nếu có hãy viết mệnh đề đồng dạng và tìm tỷ số đồng dạng.

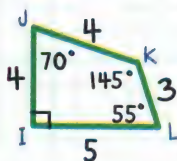
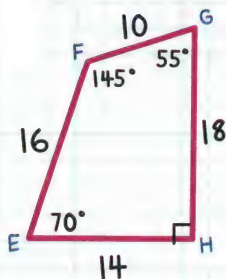
5.



6.



7.



LỜI GIẢI



1. A. Đúng

B. Sai (Độ dài cạnh tương ứng tỷ lệ.)

2. $KLMN \sim PQRS$. Có nhiều cách trả lời:

Ta có thể viết $LMNK \sim QRSP$ - các góc bằng nhau ở vị trí giống nhau trong mệnh đề đồng dạng là được.

3. 3

4. $\frac{8}{12} = \frac{x}{15}$; do đó $x = 10$

5. Không. Độ đo các góc không bằng nhau.

6. Có: $\triangle ABC \sim \triangle DBE, \frac{3}{2}$ (hoặc $\triangle DBE \sim \triangle ABC \frac{2}{3}$). (Các chữ cái trong mệnh đề đồng dạng có thể thay đổi thứ tự, miễn là các góc tương ứng ở cùng vị trí.)

7. Không

Chương 28

TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG GÓC - GÓC (G.G)

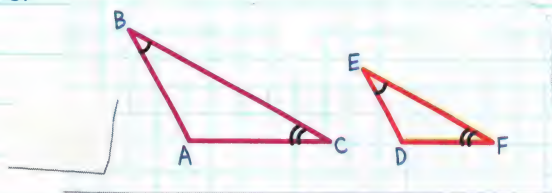
Ta có thể so sánh các góc để chứng minh các tam giác đồng dạng.

ĐỊNH LÝ ĐỒNG DẠNG GÓC - GÓC (G.G)

Nếu hai góc của một tam giác bằng với hai góc của một tam giác khác thì hai tam giác đó đồng dạng.

Nếu $\angle B \cong \angle E$ và $\angle C \cong \angle F$

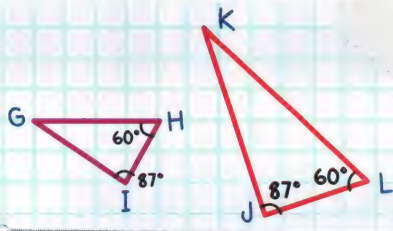
Thì $\triangle ABC \sim \triangle DEF$



VÍ DỤ: Vì $\angle H \cong \angle L$ và $\angle I \cong \angle J$,

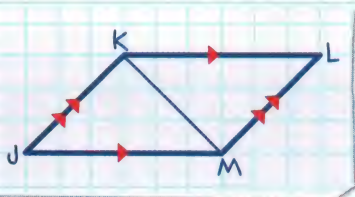
Nên theo tiên đề đồng dạng góc - góc (G.G) ta có:

$$\triangle GHI \sim \triangle KLJ.$$



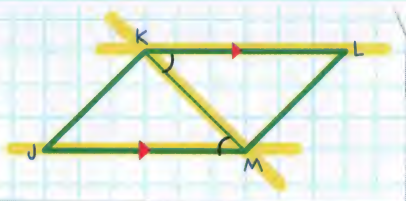
VÍ DỤ: Hãy cho biết $\triangle JKM$ có đồng dạng với $\triangle LMK$ không.

Vì $\overline{KL} \parallel \overline{JM}$ nên các góc so le trong bằng nhau.

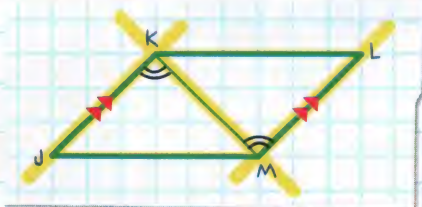


Vậy $\angle JMK \cong \angle LKM$.

Vì $\overline{JK} \parallel \overline{ML}$ nên ta cũng có các góc so le trong bằng nhau.



Vậy $\angle JKM \cong \angle LMK$.



Theo tiên đề đồng dạng góc - góc (G.G) ta có:

$$\triangle JKM \cong \triangle LMK.$$

VÍ DỤ:

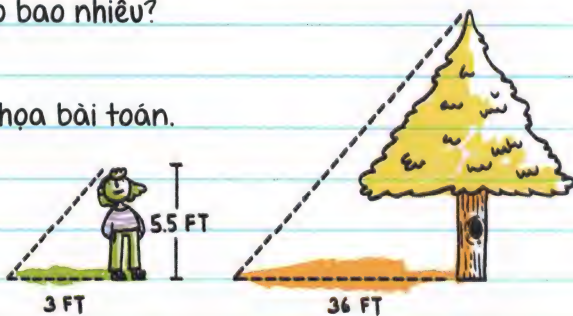
Beverly cao $5\frac{1}{2}$ foot. Bóng của cô ấy dài 3 foot. Cô ấy đo được bóng của một cái cây gần đó dài 36 foot. Hỏi cây cao bao nhiêu?

Bước 1: Vẽ minh họa bài toán.

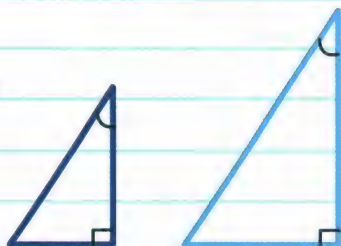
Bước 2:

Xác định

hình đồng dạng.



Beverly và cây đều tạo thành một tam giác vuông (90°) với bóng của mình và các tia nắng mặt trời.



Các góc mà tia nắng mặt trời tạo với Beverly và cái cây bằng nhau. Mặt trời chiếu xuống cả người và cây các góc bằng nhau.

Do vậy theo tiên đề đồng dạng góc - góc (G.G) ta có các tam giác đồng dạng.

Bước 3: Viết một tỷ lệ thức rồi tìm ra đáp số.

Đặt h = chiều cao của cây. Ta có:

$$\frac{\text{Chiều dài bóng Beverly}}{\text{Chiều dài bóng cây}} = \frac{\text{Chiều cao Beverly}}{\text{Chiều cao của cây}}$$

$$\frac{3}{36} = \frac{5.5}{h}$$

$$3 \cdot h = 36 \cdot 5.5$$

$$3h = 198$$

$$h = 66$$

Vậy cây cao 66 foot.

TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CẠNH - GÓC - CẠNH (C.G.C)

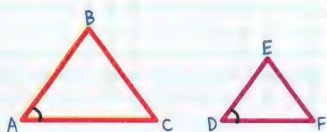
Ta có thể so sánh các cạnh tương ứng và các góc xen giữa để xác định các tam giác có đồng dạng với nhau không.

ĐỊNH LÝ ĐỒNG DẠNG CẠNH - GÓC - CẠNH (C.G.C)

Nếu hai cạnh tương ứng của hai tam giác tỷ lệ và các góc xen giữa hai cặp cạnh đó bằng nhau thì hai tam giác đồng dạng.

$$\text{Nếu } \angle A \cong \angle D \text{ và } \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$

$$\text{Thì } \triangle ABC \sim \triangle DEF.$$



VÍ DỤ: Chứng minh hai tam giác đã cho đồng dạng.

$$\triangle PRT \sim \triangle QRS$$

Chiều dài hai cạnh tương ứng tỷ lệ.

$$\frac{RQ}{RP} = \frac{18}{18+6}$$

$$= \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{RS}{RT} = \frac{15}{15+5}$$

$$= \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

Các góc xen giữa bằng nhau.

Một góc
luôn bằng
chính nó

$\angle R \cong \angle R$ (theo tính chất phản xạ)



TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CẠNH - CẠNH - CẠNH (C.C.C)

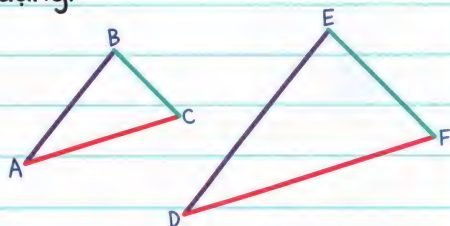
Ta có thể so sánh các cạnh tương ứng để xác định các tam giác có đồng dạng với nhau không.

ĐỊNH LÝ ĐỒNG DẠNG CẠNH - CẠNH - CẠNH (C.C.C)

Nếu các cạnh tương ứng của hai tam giác tỷ lệ thì hai tam giác đó đồng dạng.

$$\text{Nếu } \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF},$$

Thì $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.



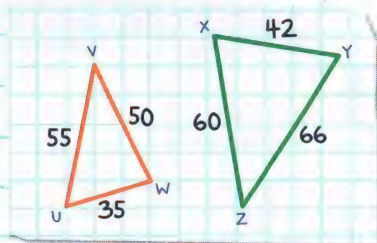
VÍ DỤ: $\triangle UVW$ có đồng dạng với $\triangle XYZ$ không?

So sánh các tỷ lệ từ cặp cạnh dài nhất đến cặp cạnh ngắn nhất.

$$\text{Cạnh dài nhất: } \frac{UV}{YZ} = \frac{55}{66} = \frac{5}{6}$$

$$\text{Cạnh ngắn nhất: } \frac{UW}{XY} = \frac{35}{42} = \frac{5}{6}$$

$$\text{Cạnh còn lại: } \frac{VW}{ZX} = \frac{50}{60} = \frac{5}{6}$$



Hai tam giác đồng dạng vì chiều dài các cạnh tương ứng tỷ lệ.

$$\triangle UVW \sim \triangle YZX$$

Để xác định thứ tự các đỉnh trong mệnh đề đồng dạng, ta sử dụng độ lớn góc để xác định các góc tương ứng bằng nhau.

các góc nhỏ nhất (đối diện với cạnh ngắn nhất)

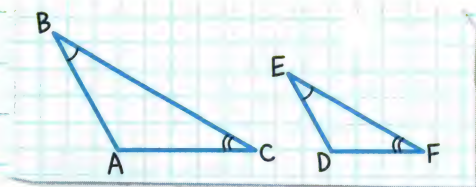
$$\triangle UVW \sim \triangle YZX$$



các góc lớn nhất (đối diện với cạnh dài nhất)

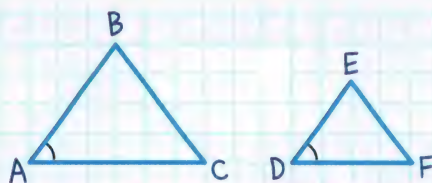
Bảng tóm tắt các trường hợp đồng dạng của hai tam giác

Định lý đồng dạng góc - góc (G.G)



Nếu $\angle B \cong \angle E$ và $\angle C \cong \angle F$
Thì $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

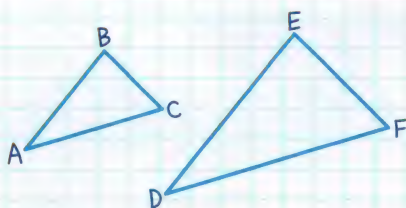
Định lý đồng
dạng cạnh - góc
- cạnh (C.G.C)



Nếu $\angle A \cong \angle D$ và $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$

Thì $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Định lý đồng
dạng cạnh - cạnh
- cạnh (C.C.C)



Nếu $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

Thì $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.





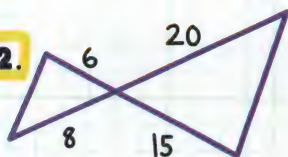
BÀI TẬP

Từ câu 1-4, hãy nêu rõ ta sẽ sử dụng định lý hoặc tiên đề đồng dạng nào để xác định các tam giác có đồng dạng với nhau hay không.

1.



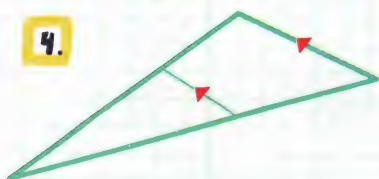
2.



3.

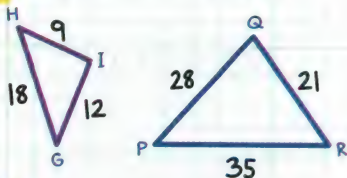


4.

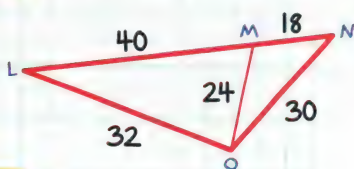


Từ câu 5-8 hãy cho biết các tam giác có đồng dạng với nhau không. Nếu có hãy viết mệnh đề đồng dạng.

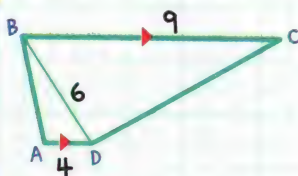
5. $\triangle GHI$ và $\triangle PQR$



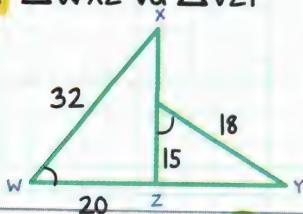
6. $\triangle LMO$ và $\triangle ONM$



7. $\triangle ABD$ và $\triangle CBD$



8. $\triangle WXZ$ và $\triangle VZY$



LỜI GIẢI



1. Tiên đề đồng dạng G.G
2. Định lý đồng dạng C.G.C
3. Định lý đồng dạng C.C.C
4. Tiên đề đồng dạng G.G
5. Không. Chiều dài các cạnh tương ứng không tỷ lệ.
6. Có, $\triangle LMO \sim \triangle ONM$ (sử dụng định lý đồng dạng C.C.C). (Các chữ cái trong mệnh đề đồng dạng có thể thay đổi thứ tự, miễn là các góc tương ứng ở cùng vị trí.)
7. Có, $\triangle ABD \sim \triangle CBD$ (sử dụng định lý đồng dạng C.G.C và định lý góc so le trong). (Các chữ cái trong mệnh đề đồng dạng có thể thay đổi thứ tự, miễn là các góc tương ứng ở cùng vị trí.)
8. Không. Chiều dài các cạnh tương ứng không tỷ lệ.

Chương 29

TỶ LỆ THỨC TRONG TAM GIÁC

Ta có thể sử dụng các tỷ lệ thức để tìm các số đo trong tam giác.

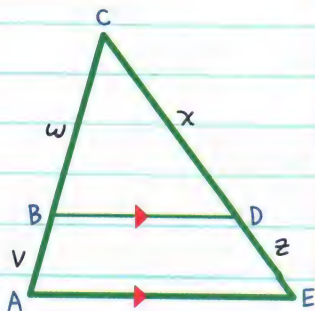
ĐỊNH LÝ TỶ LỆ TRONG TAM GIÁC (ĐỊNH LÝ TA-LÉT TRONG TAM GIÁC)

Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỷ lệ.

Nếu $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$, thì $\frac{v}{w} = \frac{z}{x}$.

Định lý đảo cũng đúng:

Nếu $\frac{v}{w} = \frac{z}{x}$, thì $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$.



VÍ DỤ: Tìm giá trị của x .

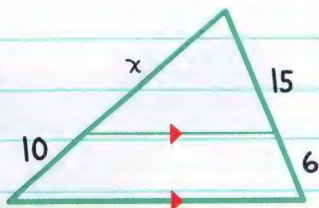
Từ định lý tỷ lệ trong tam giác ta có:

$$\frac{10}{x} = \frac{6}{15}$$

$$10 \cdot 15 = x \cdot 6$$

$$150 = 6x$$

$$x = 25$$

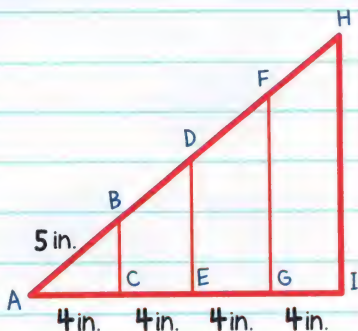


VÍ DỤ: Các thanh đỡ trên lan can được dựng cách nhau 4 inch.

Chiều dài của tay vịn lan can từ thanh đỡ đầu tiên đến thanh đỡ thứ hai (AB) là 5 inch.

$$AB = 5 \text{ inch.}$$

Hãy tìm chiều dài của tay vịn giữa bốn thanh đỡ khác (BD, DF và FH).



Vì các thanh đỡ song song với nhau nên ta có thể sử dụng định lý tỷ lệ trong tam giác.

$$\frac{AC}{CE} = \frac{AB}{BD}$$

$$\frac{4}{4} = \frac{5}{BD}$$

$$4 \cdot BD = 4 \cdot 5$$

$$4BD = 20$$

$$BD = 5$$

Sử dụng cùng tỷ lệ thức như trên với DF và FH ta có:

$$\frac{CE}{EG} = \frac{BD}{DF}$$

$$\frac{4}{4} = \frac{5}{DF}$$

$$DF = 5$$

$$\frac{EG}{GI} = \frac{DF}{FH}$$

$$\frac{4}{4} = \frac{5}{FH}$$

$$FH = 5$$

Chiều dài của tay vịn giữa bốn thanh đỡ khác là 5 inch.

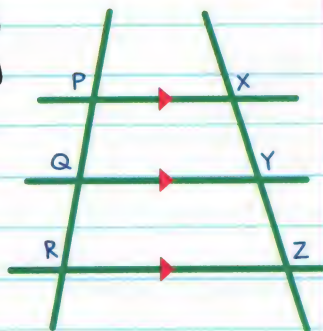


HỆ QUẢ là một mệnh đề suy ra từ một định lý hay tiên đề mà yêu cầu chứng minh đơn giản hoặc không cần chứng minh.

gọi là hiển nhiên đúng

HỆ QUẢ CỦA ĐỊNH LÝ TỶ LỆ TRONG TAM GIÁC

Nếu từ ba đường thẳng song song trở lên cắt hai cát tuyến thì chúng định ra trên hai cát tuyến những đoạn thẳng tương ứng tỷ lệ.



Nếu $\overline{PX} \parallel \overline{QY} \parallel \overline{RZ}$,

$$\text{thì } \frac{PQ}{QR} = \frac{XY}{YZ}.$$

VÍ DỤ: Đại lộ Royal, đại lộ LA và phố Cochran song song với nhau. Chúng đều cắt đại lộ Sequoia và đại lộ Sycamore.

Hãy tìm khoảng cách x giữa đại lộ Royal và đại lộ LA.



Sử dụng hệ quả của định lý tỷ lệ trong tam giác ta có:

$$\frac{x}{1.2} = \frac{2.0}{1.6}$$

$$x \cdot 1.6 = 1.2 \cdot 2.0$$

$$1.6x = 2.4$$

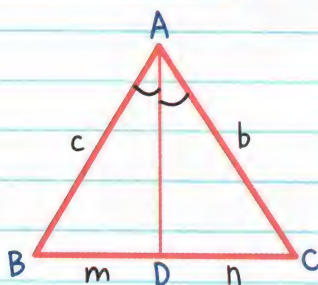
$$x = 1.5$$

Vậy khoảng cách giữa đại lộ Royal và đại lộ LA là 1,5 dặm.

ĐỊNH LÝ PHÂN GIÁC CỦA GÓC

Nếu \overline{AD} là phân giác của $\angle A$ thì $\frac{c}{m} = \frac{b}{n}$.

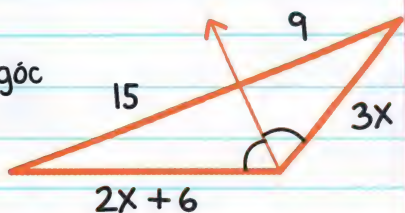
Định lý đảo của định lý này cũng đúng.



Nếu $\frac{c}{m} = \frac{b}{n}$, thì \overline{AD} là phân giác của $\angle A$.

VÍ DỤ: Tìm giá trị của x .

Theo định lý phân giác của góc ta có:



$$\frac{3x}{9} = \frac{2x+6}{15}$$

$$3x \cdot 15 = 9 \cdot (2x + 6)$$

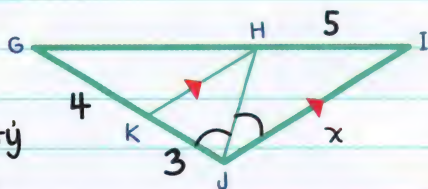
$$45x = 18x + 54$$

$$27x = 54$$

$$x = 2$$

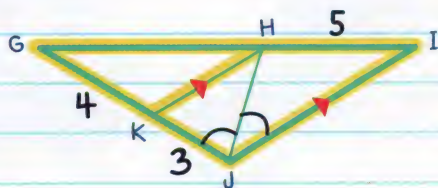
VÍ DỤ: Tìm giá trị của x .

Bước 1: Sử dụng định lý tỷ lệ trong tam giác để tìm GH.



$$\frac{3}{4} = \frac{5}{GH}$$

$$3 \cdot GH = 4 \cdot 5$$



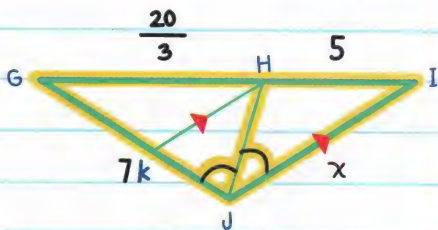
$$3GH = 20$$

$$GH = \frac{20}{3}$$

Bước 2: Sử dụng định lý phân giác của góc để tìm giá trị của x .

Vì $GK = 4$ và $KJ = 3$,

$$GJ = GK + KJ = 4 + 3 = 7$$



Từ định lý phân giác của góc ta được:

$$\frac{x}{5} = \frac{7}{\frac{20}{3}}$$

$$\frac{20}{3} = GH$$

$$x \cdot \frac{20}{3} = 5 \cdot 7$$

$$\frac{20}{3}x = 35$$

$$\frac{20}{3}x \cdot 3 = 35 \cdot 3$$

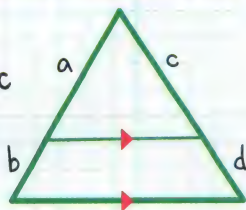
$$20x = 105$$

$$x = \frac{105}{20} = \frac{21}{4} = 5.25$$

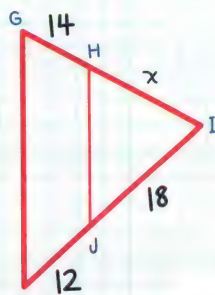


BÀI TẬP

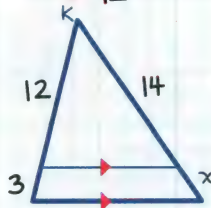
1. Sử dụng định lý tỷ lệ trong tam giác để viết tỷ lệ thức cho tam giác sau.



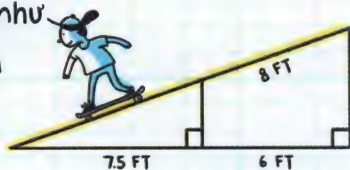
2. Mark nói ta có thể sử dụng định lý tỷ lệ trong tam giác để tìm giá trị của x trong tam giác này. Mark nói có đúng không?



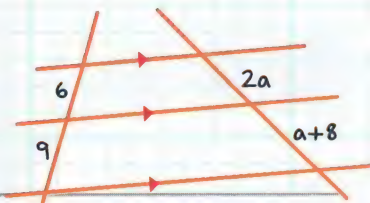
3. Tìm giá trị của x trong tam giác bên phải.



4. Một đoạn đường trượt ván có hai dầm đỡ song song với nhau như trong hình minh họa. Hãy tìm chiều dài của đường trượt.



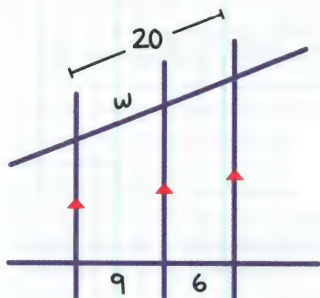
5. Tìm giá trị của a trong hình vẽ bên phải.



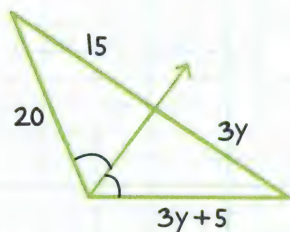


BÀI TẬP

6. Tìm giá trị của w trong hình vẽ dưới đây.



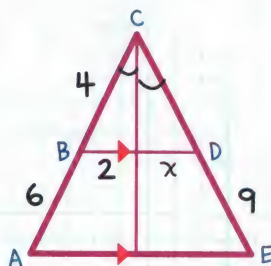
7. Tìm giá trị của y trong tam giác dưới đây



Với câu 8 và 9, sử dụng hình vẽ dưới đây.

8. Tìm chiều dài của CD

9. Tìm giá trị của x .



LỜI GIẢI



1. $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ (hoặc $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ hoặc $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ hoặc $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$)

2. Không. Giả thiết chưa cho \overline{GK} song song với \overline{HJ} .

3. $\frac{3}{x} = \frac{12}{14}$; do đó $x = \frac{7}{2}$

4. $\frac{6}{8} = \frac{7,5}{x}$; do đó $x = 10$. Đường trượt dài 18 foot.

5. $\frac{9}{a+8} = \frac{6}{2a}$; do đó $a = 4$

6. (Sử dụng tỷ số: $\frac{9}{6} = \frac{w}{20-w}$); $w = 12$

7. $\frac{3y+5}{3y} = \frac{20}{15}$; do đó $y = 5$

8. $\frac{6}{9} = \frac{4}{CD}$; do đó $CD = 6$

9. $\frac{4}{2} = \frac{6}{x}$; do đó $x = 3$



BÀI 7

Tam giác vuông
và lượng giác

Chương 30

HỆ SỐ GÓC VÀ BIỂU THỨC TUYẾN TÍNH

HỆ SỐ GÓC

HỆ SỐ GÓC (m) là tỷ số mô tả độ dốc của một đường thẳng:

$$\text{hệ số góc } (m) = \frac{\text{chiều cao}}{\text{chiều dài}}$$

↑ **CHIỀU CAO** được hiểu là đường thẳng đi lên hoặc xuống bao nhiêu.

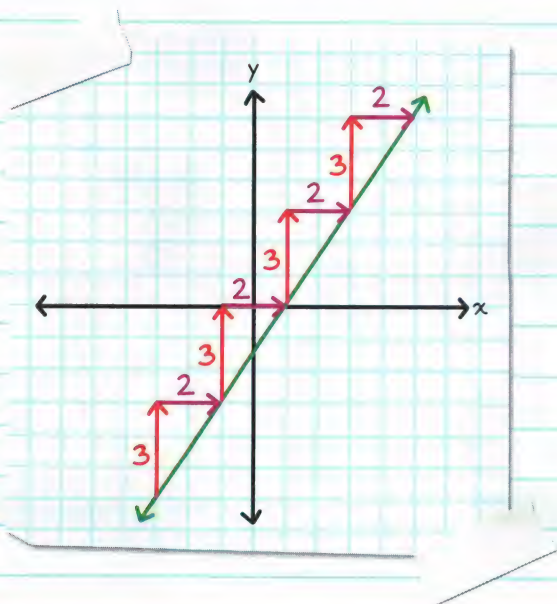
↔ **CHIỀU DÀI** được hiểu là đường thẳng đi sang trái hoặc sang phải bao nhiêu.

HÃY NGHĨ ĐẾN: Nằm cao trên giường.
Chạy dài trên đường.

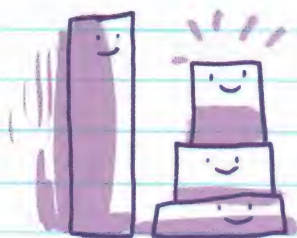
VÍ DỤ: Một đường thẳng có hệ số góc bằng $\frac{3}{2}$.

CHIỀU CAO = 3

CHIỀU DÀI = 2



Hệ số góc (m) bằng $\frac{3}{2}$ nghĩa là mọi lúc đường thẳng đều đi lên cao 3 đơn vị và nghiêng sang bên 2 đơn vị.

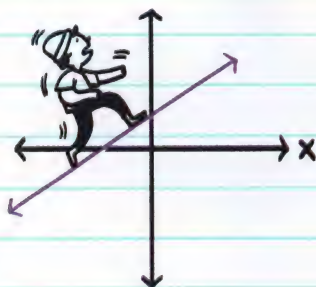


Có bốn loại hệ số góc:

Hệ số góc dương

- đi lên từ trái sang phải
- chiều cao và chiều dài đều dương

$$\frac{\text{chiều cao}}{\text{chiều dài}} = \text{dương}$$

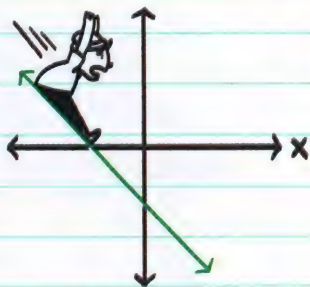


SAM ĐI LÊN

Hệ số góc âm

- đi xuống từ trái sang phải
- chiều cao âm và chiều dài dương

$$\frac{\text{chiều cao}}{\text{chiều dài}} = \text{âm}$$

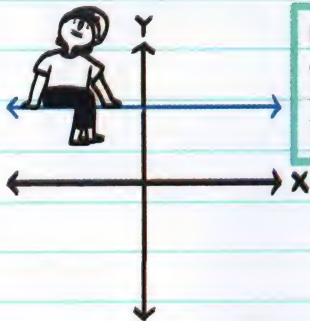


SAM ĐI XUỐNG

Hệ số góc bằng 0

- nằm ngang
- chiều cao = 0, vậy

$$\frac{\text{chiều cao}}{\text{chiều dài}} = \frac{0}{\text{chiều dài}} = 0$$

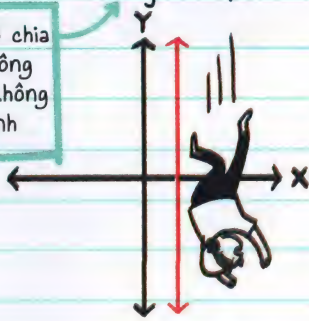


SAM KHÔNG ĐI Đâu

Hệ số góc không xác định

- thẳng đứng
 - chiều dài = 0, vậy
- $$\frac{\text{chiều cao}}{\text{chiều dài}} = \frac{\text{chiều cao}}{0}$$
- không xác định

Một số chia cho không là số không xác định



SAM NGUY RỒI!

5 ĐIỀU CẦN BIẾT VỀ HỆ SỐ GÓC:

1. Cự đi **LÊN**
là **CHIỀU CAO DƯƠNG**.

2. Cự đi **XUỐNG**
là **CHIỀU CAO ÂM**.

3. Cự sang **PHẢI**
là **CHIỀU DÀI DƯƠNG**.

4. Cự sang **TRÁI**
là **CHIỀU DÀI ÂM**.

5. Hệ số góc **KHÔNG ĐỔI** tại bất kỳ
điểm nào trên một **ĐƯỜNG THẲNG**.

Tìm hệ số góc của một đường thẳng

Để tìm hệ số góc của một đường thẳng:

1. Đánh dấu hai điểm bất kỳ trên đường thẳng.
2. Vẽ một tam giác vuông nối hai điểm đó sao cho cạnh huyền nằm trên đường thẳng đã cho.
3. Đếm số đơn vị đường thẳng đi lên hoặc xuống để tìm chiều cao.
4. Đếm số đơn vị đường thẳng đi sang trái hoặc phải để tìm chiều dài.

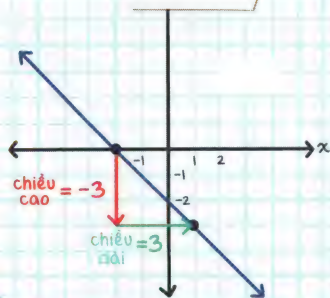
VÍ DỤ: Tìm hệ số góc của đường thẳng.

xuống 3 đơn vị

$$\text{hệ số góc (m)} = \frac{\text{chiều cao}}{\text{chiều dài}} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$\text{hệ số góc} = -1$$

sang phải 3 đơn vị



(Hệ số góc bằng $-\frac{3}{3}$ nghĩa là lúc nào đường thẳng cũng xuôi xuống 3 đơn vị, đồng thời nghiêng sang phải 3 đơn vị.)

Công thức tính hệ số góc khi biết hai điểm nằm trên đường thẳng:

$$\text{hệ số góc} = \frac{\text{chênh lệch tung độ}}{\text{chênh lệch hoành độ}}$$
$$\text{hoặc } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

x_1 đọc là "x một"

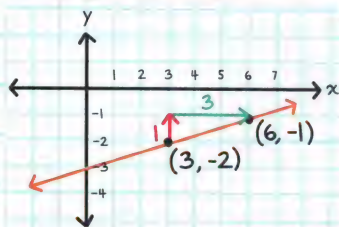
chỉ số dưới

Chỉ số dưới giúp ta phân biệt các điểm. Ta có thể đặt tên một điểm là (x_1, y_1) và điểm khác là (x_2, y_2) .

Thứ tự các điểm được đặt tên không quan trọng, miễn là ta giữ đúng các cặp tọa độ với nhau.

VÍ DỤ: Tìm hệ số góc của đường thẳng đi qua hai điểm $(3, -2)$ và $(6, -1)$.

Đặt $(x_1, y_1) = (3, -2)$ và
 $(x_2, y_2) = (6, -1)$.

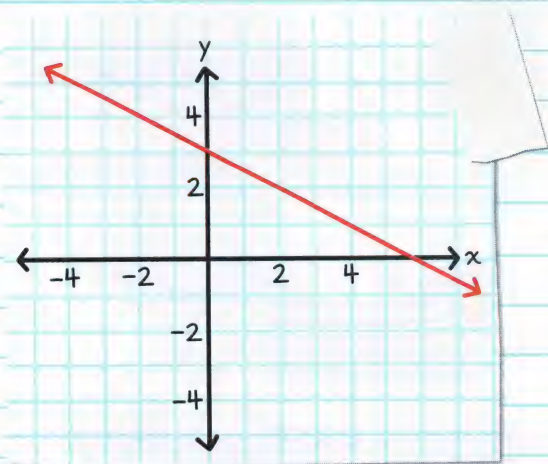


Vậy $x_1 = 3$, $y_1 = -2$, $x_2 = 6$, và $y_2 = -1$

$$\text{hệ số góc } (m) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1 - (-2)}{6 - 3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{hệ số góc} = \frac{1}{3}$$

VÍ DỤ: Tìm hệ số góc của đường thẳng trong hình vẽ đã cho.



Chọn hai điểm bất kỳ trên đường thẳng.

Ví dụ $(2, 2)$ và $(4, 1)$.

Đặt $(x_1, y_1) = (2, 2)$ và $(x_2, y_2) = (4, 1)$.

$$\text{Vậy } x_1 = 2 \quad y_1 = 2$$

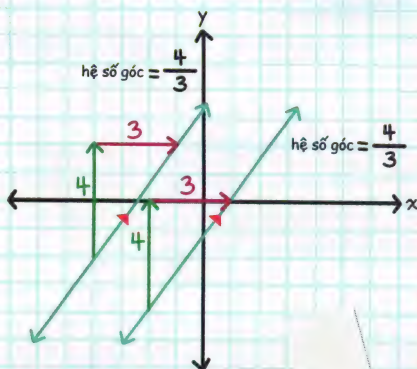
$$x_2 = 4 \quad y_2 = 1$$

$$\text{hệ số góc } (m) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 2}{4 - 2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{hệ số góc} = -\frac{1}{2}$$

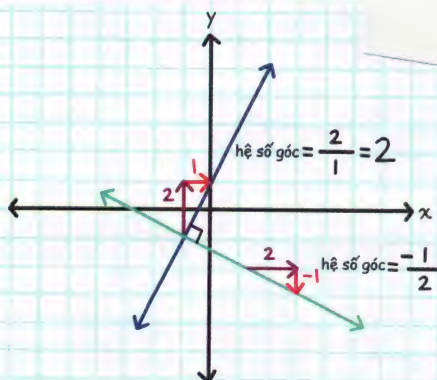


Các đường thẳng song song có cùng hệ số góc.



Các đường thẳng có hệ số góc là **NGHỊCH ĐẢO ÂM** của nhau.

$\frac{2}{1}$ và $-\frac{1}{2}$ là các số nghịch đảo âm.



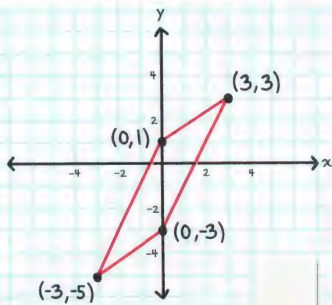
NGHỊCH ĐẢO là một phân số trong đó tử số và mẫu số đổi chỗ cho nhau.

$\frac{a}{b}$ và $\frac{b}{a}$ là hai số nghịch đảo của nhau.

$\frac{a}{b}$ và $-\frac{b}{a}$ là hai số **NGHỊCH ĐẢO ÂM** của nhau.

VÍ DỤ: Hãy cho biết tứ giác có các đỉnh $(0, 1)$, $(3, 3)$, $(-3, -5)$ và $(0, -3)$ có phải là hình bình hành không.

Vẽ bốn điểm đã cho trên mặt phẳng tọa độ. Nối các điểm để tạo thành một tứ giác.



Nếu hai cặp cạnh đối diện song song thì nó là hình bình hành.

Cạnh $(x_1, y_1) = (0, 1)$ và $(x_2, y_2) = (3, 3)$ có hệ số góc là:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 1}{3 - 0} = \frac{2}{3}$$

Cạnh $(x_1, y_1) = (-3, -5)$ và $(x_2, y_2) = (0, -3)$ có hệ số góc là:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - (-5)}{0 - (-3)} = \frac{-3 + 5}{0 + 3} = \frac{2}{3}$$

Vậy hai cạnh này có cùng hệ số góc, do đó chúng song song.

Cạnh $(x_1, y_1) = (-3, -5)$ và $(x_2, y_2) = (0, 1)$ có hệ số góc là:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - (-5)}{0 - (-3)} = \frac{1 + 5}{0 + 3} = \frac{6}{3} = 2$$

Cạnh $(x_1, y_1) = (0, -3)$ và $(x_2, y_2) = (3, 3)$ có hệ số góc là:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - (-3)}{3 - 0} = \frac{3 + 3}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

Vậy hai cạnh này có cùng hệ số góc, do đó chúng song song.

Tứ giác đã cho là hình bình hành.

VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Phương trình đường thẳng là một **PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH**.

Phương trình tuyến tính có dạng:

$$y = mx + b$$

y = tất cả các giá trị y trên đường thẳng

m = hệ số góc $\left(\frac{\text{chiều cao}}{\text{chiều dài}} \right)$

b = điểm cắt trục tung [điểm mà đường thẳng giao với trục tung - điểm $(0, b)$]

Nếu ta biết cả điểm cắt trục tung và hệ số góc của đường thẳng thì ta có thể vẽ được đường thẳng.

Phương trình tuyến tính cũng có thể được viết dưới dạng:

$$Ax + By = C \text{ (dạng chuẩn tắc)}$$

A, B và C là các hằng số.

Hằng số là các số hay các chữ đứng riêng biệt, không chứa biến và giá trị của chúng không thể thay đổi

VÍ DỤ: Vẽ đường thẳng $y = 2x - 1$.

Công thức chung: $y = mx + b$

$$m = 2, \text{ hoặc } \frac{2}{1} \quad b = -1$$

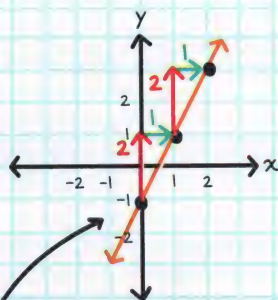
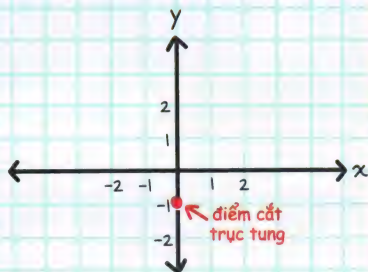
Bước 1: Xác định điểm cắt trục tung.

$$x = 0 \text{ và } y = -1: (0, -1)$$

Bước 2: Sử dụng hệ số góc để tìm thêm điểm khác.

Vì hệ số góc là $\frac{2}{1}$, ta có chiều cao là 2 và chiều dài là 1.

Bước 3: Nối các điểm.



Bắt đầu từ điểm $(0, -1)$ và xác định thêm các điểm dựa trên chiều cao chiều dài.

VÍ DỤ: Vẽ đường thẳng $x + y = 4$.

Trước tiên, ta viết phương trình đường thẳng dưới dạng hệ số góc - giao điểm $y = mx + b$.

$$y = -x + 4; \quad m = -\frac{1}{1}; \quad b = 4$$

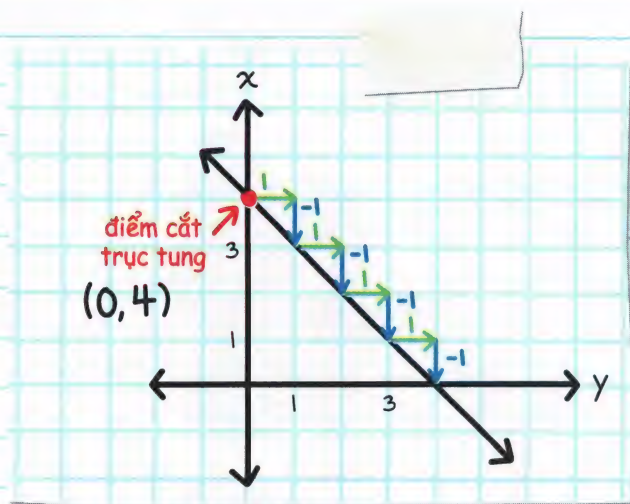
$-x$ cũng chính là $-1x$ nên $m = -1/1$.

Bước 1: Xác định điểm cắt trục tung $(0, 4)$.

Bước 2: Sử dụng hệ số góc $(-\frac{1}{1})$ để tìm thêm điểm khác.

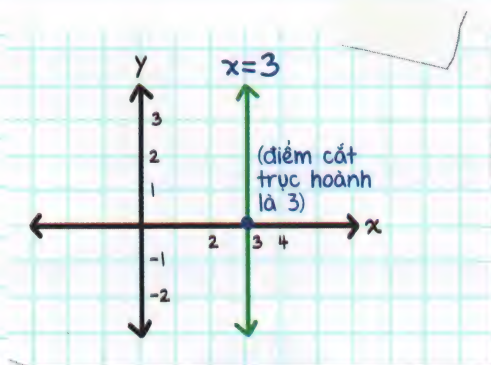
$$\left(\frac{\text{chiều cao}}{\text{chiều dài}} = \frac{-1}{1} \text{ hoặc } \frac{\text{chiều cao}}{\text{chiều dài}} = \frac{1}{-1} \right)$$

Bước 3: Nối các điểm.



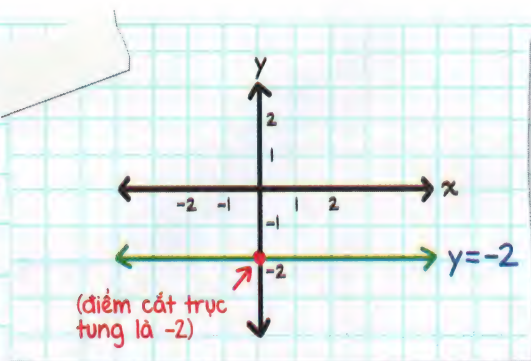
CÁC ĐƯỜNG THẲNG NẰM NGANG VÀ THẲNG ĐỨNG

$x = a$ là đường thẳng thẳng đứng cắt trục hoành tại điểm $(a, 0)$.



Ghi nhớ: Hệ số góc của đường thẳng thẳng đứng không xác định.

$y = b$ là đường thẳng nằm ngang cắt trục tung tại điểm $(0, b)$.



Ghi nhớ: Hệ số góc của đường thẳng nằm ngang bằng không.

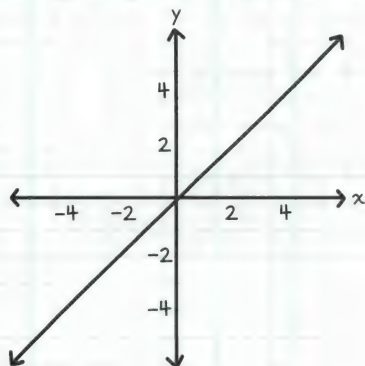


BÀI TẬP

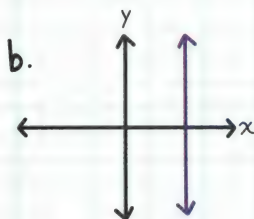
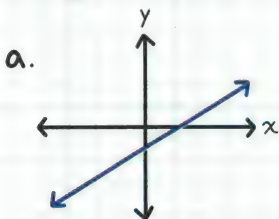
1. Hệ số góc và điểm cắt trục tung của đường thẳng $y = -\frac{3}{4}x - 10$ là gì?

2. Tìm hệ số góc của đường thẳng đi qua hai điểm $(1, -2)$ và $(5, -4)$.

3. Tìm hệ số góc của đường thẳng trong hình vẽ.



4. Trong các phần a và b, hãy cho biết đường thẳng trong hình vẽ có hệ số góc dương, âm, bằng không hay không xác định.



5. Đường thẳng B có hệ số góc là -4 . Hỏi hệ số góc của đường thẳng song song với B là bao nhiêu?

LỜI GIẢI



1. hệ số góc (m) = $-\frac{3}{4}$, điểm cắt trục tung = $(0, -10)$

2. $\frac{-4 - (-2)}{5 - 1}$; do đó hệ số góc = $-\frac{1}{2}$

3. hệ số góc = 1

4. A. Dương

B. Không xác định

5. -4

Chương 31

ĐỊNH LÝ PYTAGO

Một tam giác vuông có hai cạnh góc vuông và một **CẠNH HUYỀN** - cạnh đối diện với góc vuông. Các cạnh góc vuông kề với góc vuông. Chiều dài các cạnh góc vuông là a và b còn c là chiều dài cạnh huyền.

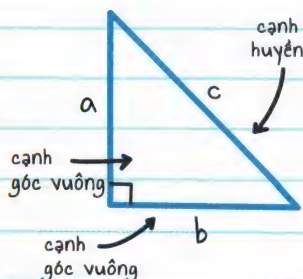
ĐỊNH LÝ PYTAGO được sử dụng để tìm chiều dài của một cạnh trong tam giác vuông.

ĐỊNH LÝ PYTAGO

Trong một tam giác vuông, tổng bình phương độ dài hai cạnh góc vuông bằng bình phương cạnh huyền.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

cạnh góc vuông cạnh góc vuông cạnh huyền



VÍ DỤ: Sử dụng định lý Pytago để tìm giá trị của x .

Chiều dài của cạnh huyền bằng 10.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$a = x, b = 6, \text{ và } c = 10.$$

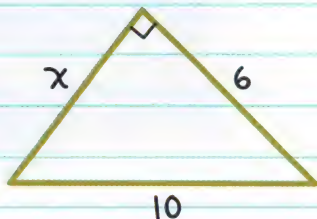
$$x^2 + 6^2 = 10^2$$

$$x^2 + 36 = 100$$

$$x^2 + 36 - 36 = 100 - 36$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{64}$$

$$x = 8$$



Cạnh huyền là cạnh đối diện với góc vuông.
Cạnh huyền luôn dài hơn hai cạnh góc vuông.

(Để tìm x , ta lấy căn bậc hai của cả hai vế)



CĂN BẬC HAI

Căn bậc hai của một số là một số khi nhân với chính nó thì bằng số ban đầu. Ta biểu diễn căn bậc hai bằng cách đặt số đầu tiên trong dấu căn, hay $\sqrt{\quad}$.

Căn bậc hai của 64 được viết là $\sqrt{64}$ và được đọc là "căn bậc hai của 64."

$$\sqrt{64} = \sqrt{8 \times 8} = 8 \text{ và } \sqrt{64} = \sqrt{(-8) \times (-8)} = -8$$

Căn bậc hai của 64 là 8 và -8.

$\sqrt{64}$ còn được gọi là số chính phương:

$$8 \times 8$$

tích của hai
số nguyên
bằng nhau

Nếu một số dưới dấu căn KHÔNG phải là số chính phương thì ta có một số vô tỷ.

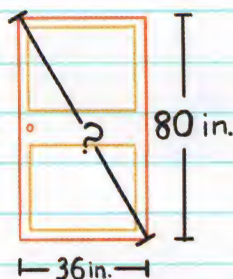
Ví dụ: $\sqrt{7}$ là số vô tỷ
 $\sqrt{13}$ là số vô tỷ

Một số không thể nhân với chính nó để tạo thành số này.

BẠN GỌI AI LÀ
VÔ LÝ?!



VÍ DỤ: Brandy đo chiều dài hai cạnh cánh cửa. Chiều cao cánh cửa là 80 inch còn chiều dài đáy cửa là 36 inch. Hỏi đường chéo của cánh cửa dài bao nhiêu?



Gọi c là chiều cao của cánh cửa,

Sử dụng định lý Pytago với $a = 80$, $b = 36$ và ta cần tìm $c = ?$.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$80^2 + 36^2 = c^2$$

$$6400 + 1296 = 7.696$$

$$c^2 = 7.696$$

$$\sqrt{c^2} = \sqrt{7.696}$$

$$c = 87,7$$

Vậy chiều cao của đường chéo cánh cửa dài 87,7 inch.

BỘ BA SỐ PYTAGO là số đo ba cạnh luôn tạo thành một tam giác vuông.

Đây là một vài bộ ba số Pytago thường dùng:

$$3, 4, 5 \quad (3^2 + 4^2 = 5^2)$$

$$5, 12, 13 \quad (5^2 + 12^2 = 13^2)$$

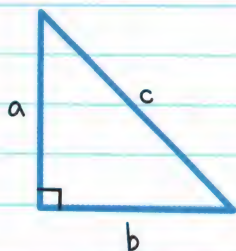
$$8, 15, 17 \quad (8^2 + 15^2 = 17^2)$$

Chú ý: Bội số của các số này cũng tạo thành bộ ba số Pytago.

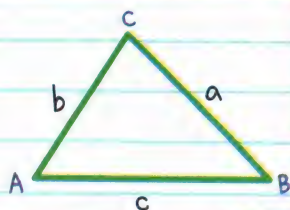
Ví dụ, 6, 8, 10 và 9, 12, 15.

QUY TẮC TAM GIÁC VUÔNG, NHỌN VÀ TÙ

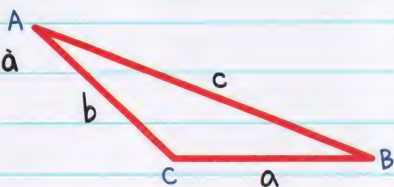
Nếu $c^2 = a^2 + b^2$ thì $\triangle ABC$
là tam giác vuông.



Nếu $c^2 < a^2 + b^2$ thì $\triangle ABC$
là tam giác nhọn.



Nếu $c^2 > a^2 + b^2$ thì $\triangle ABC$ là tam giác tù.



VÍ DỤ: Một tam giác có độ dài các cạnh là 6, 5 và 10. Hỏi tam giác đó là tam giác vuông, nhọn hay tù?

Vì 10 là cạnh dài nhất nên $c = 10$.

$$c^2 = 10^2 = 100$$

$$a^2 + b^2 = 6^2 + 5^2$$

$$= 36 + 25$$

$$= 61$$

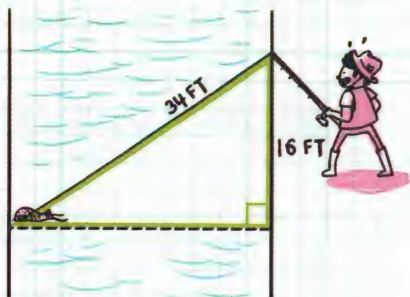
$$100 > 61$$

Vì $c^2 > a^2 + b^2$ nên tam giác đã cho là tam giác tù.

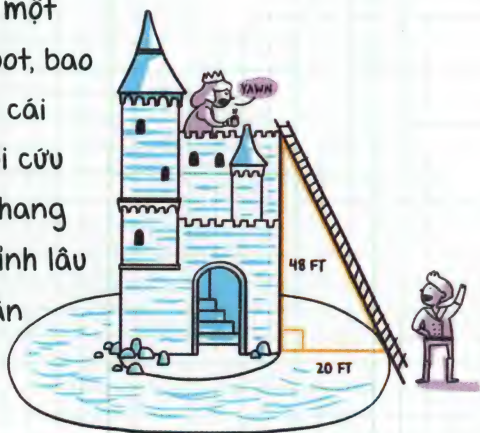


BÀI TẬP

1. Orion bắt một con cá dưới độ sâu 16 foot ở phía bờ sông bên kia bằng một sợi dây dài 34 foot. Hỏi lòng sông rộng bao nhiêu?



2. Daphne bị kẹt trong một tòa lâu đài cao 48 foot, bao quanh lâu đài là một cái hào rộng 20 foot. Đội cứu hộ cần đặt một cái thang ở bờ hào để với tới đỉnh lâu đài. Hỏi đội cứu hộ cần cái thang dài bao nhiêu?



Trong câu 3-4, cho trước chiều dài các cạnh của một tam giác. Hãy cho biết tam giác đó là tam giác vuông, nhọn hay tù?

3. 3, 4, 7

4. 12, 16, 20

LỜI GIẢI



1. $34^2 = 16^2 + x^2$, do đó $x = 30$ ft
2. $20^2 + 48^2 = x^2$, do đó $x = 52$ ft
3. $7^2 > 4^2 + 3^2$, do đó tam giác đã cho là tam giác tù
4. $20^2 = 12^2 + 16^2$, do đó tam giác đã cho là tam giác vuông

Chương 32

CÁC CÔNG THỨC VỀ TRUNG ĐIỂM VÀ KHOẢNG CÁCH

CÔNG THỨC TRUNG ĐIỂM

Trung điểm là điểm nằm trên đoạn thẳng và cách đều hai đầu đoạn thẳng. **CÔNG THỨC TRUNG ĐIỂM** được sử dụng để tìm tọa độ của trung điểm đoạn thẳng trên trục số hoặc trên mặt phẳng tọa độ.

Trung điểm trên trục số

Trung điểm của \overline{AB} là:

$$\text{trung điểm} = \frac{a+b}{2}$$



VÍ DỤ: Trung điểm của \overline{PR} là điểm nào?



Sử dụng công thức trung điểm ta có:

$$\text{trung điểm} = \frac{a+b}{2}$$

trung điểm của \overline{PR}

$$a = -1 \text{ và } b = 5:$$

$$= \frac{-1+5}{2}$$

$$= \frac{4}{2}$$

$$= 2$$

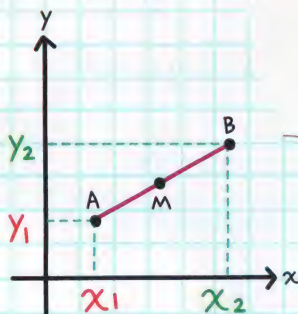
Vậy trung điểm là 2.

Trung điểm trên mặt phẳng tọa độ

Trung điểm của \overline{AB} là:

$$\text{trung điểm} = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2} \right)$$

(x_1, y_1) và (x_2, y_2) là tọa độ của hai điểm đầu đoạn thẳng.



VÍ DỤ: Tìm trung điểm của \overline{CD} biết $C(2, -2)$ và $D(6, 2)$.

Sử dụng công thức trung điểm ta có:

$$\text{trung điểm} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

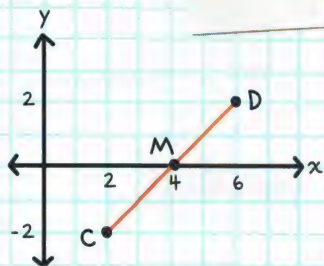
$$(x_1, y_1) = (2, -2) \text{ và } (x_2, y_2) = (6, 2):$$

$$x_1 = 2, y_1 = -2, x_2 = 6, y_2 = 2$$

$$= \left(\frac{2+6}{2}, \frac{-2+2}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{8}{2}, \frac{0}{2} \right)$$

$$= (4, 0)$$



VÍ DỤ: Đoạn thẳng \overline{GH} có điểm đầu $G(-3, -4)$ và trung điểm $P(-1, -3)$. Tìm tọa độ của điểm đầu H .

Sử dụng công thức trung điểm ta có:

$$G(-3, -4) = (x_1, y_1) \text{ và } H = (x_2, y_2).$$

$$x_1 = -3, y_1 = -4, \text{ trung điểm} = (-1, -3)$$

$$\text{trung điểm} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

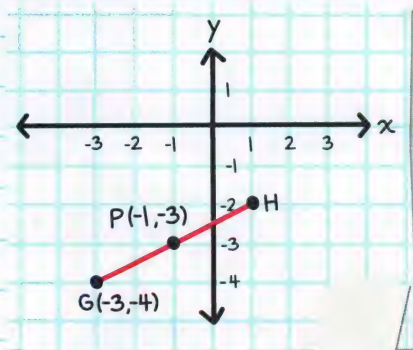
$$(-1, -3) = \left(\frac{-3 + x_2}{2}, \frac{-4 + y_2}{2} \right)$$

Hoành độ là:

$$-1 = \frac{-3 + x_2}{2}$$

$$-2 = -3 + x_2$$

$$x_2 = 1$$



Tung độ là:

$$-3 = \frac{-4 + y_2}{2}$$

$$-6 = -4 + y_2$$

$$y_2 = -2$$

Vậy, tọa độ của H là (1, -2).



CÔNG THỨC KHOẢNG CÁCH

CÔNG THỨC KHOẢNG CÁCH được sử dụng để tìm khoảng cách giữa hai điểm (hoặc chiều dài đoạn thẳng) trên một trục số hoặc trên mặt phẳng tọa độ.

Khoảng cách trên trục số

Khoảng cách giữa hai điểm A và B là:

tọa độ của A và B

$$AB = |a - b| \text{ hoặc } |b - a|$$

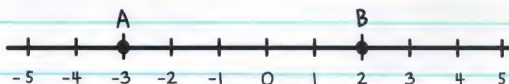


"|" nghĩa là giá trị tuyệt đối

Giá trị tuyệt đối: khoảng cách của một số trên trục số đến điểm 0 mà không kể số đó nằm hướng nào so với điểm 0.

VÍ DỤ: Tìm giá trị của AB. Sử dụng công thức khoảng cách.

$$AB = |a - b|$$



$$a = -3 \text{ và } b = 2:$$

$$AB = |a - b| = |-3 - 2| = |-5| = 5$$

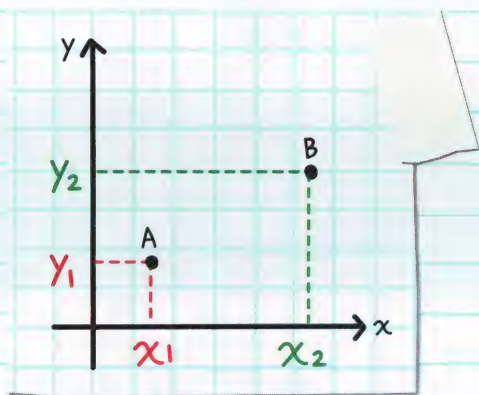
Khoảng cách trên mặt phẳng tọa độ

Khoảng cách giữa hai điểm trên mặt phẳng tọa độ là căn bậc hai của bình phương hiệu hai hoành độ cộng với bình phương hiệu hai tung độ.

Khoảng cách giữa A và B là:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

tọa độ của A và B



VÍ DỤ: Khoảng cách giữa các điểm S(-2, -1) và T(1, 3) là bao nhiêu?

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$(x_1, y_1) = (-2, -1)$ và $(x_2, y_2) = (1, 3)$:

$x_1 = -2, y_1 = -1, x_2 = 1, y_2 = 3$

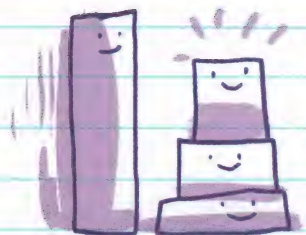
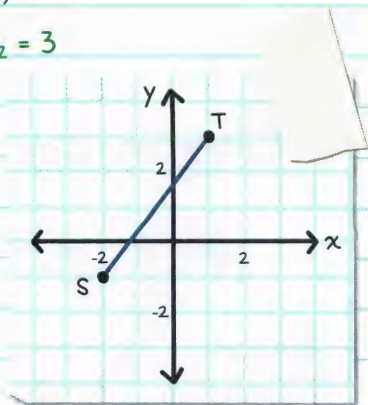
$$ST = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(1 - (-2))^2 + (3 - (-1))^2}$$

$$= \sqrt{(1 + 2)^2 + (3 + 1)^2}$$

$$= \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25}$$

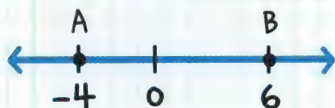
$$ST = 5$$





BÀI TẬP

1. Tìm trung điểm của \overline{AB} trên trục số.

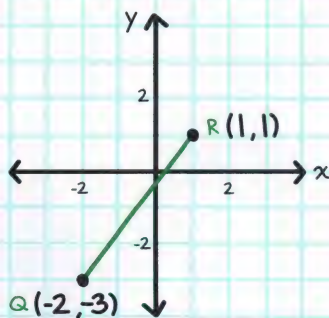


2. Điền vào câu sau:

Cho $A(x_1, y_1)$ và $B(x_2, y_2)$, tọa độ của trung điểm M của \overline{AB} là _____.

3. Tìm trung điểm của \overline{CD} biết $C(2, 3)$ và $D(4, 8)$.

4. Tìm trung điểm của \overline{QR} trong hình vẽ sau.



5. Đoạn thẳng \overline{EG} có điểm đầu $E(-7, -5)$ và trung điểm $M(-3, -1)$. Hãy tìm tọa độ của điểm mút G .

BÀI TẬP

6. Sử dụng công thức khoảng cách trên trục số để viết công thức cho \overline{RT} .

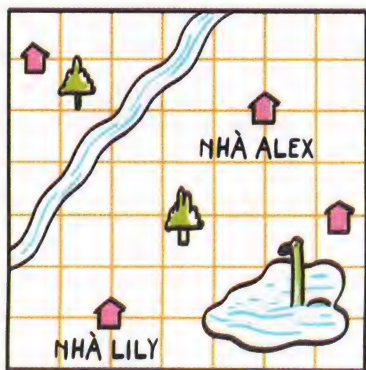


7. Khoảng cách giữa M và N là bao nhiêu?



8. Khoảng cách giữa $P(-5, 8)$ và $R(0, -4)$ là bao nhiêu?

9. Sử dụng công thức khoảng cách để tìm khoảng cách giữa nhà Lily và nhà Alex, hai nhà nằm ở điểm $(2, 1)$ và $(5, 5)$ như thể hiện trong bản đồ dưới đây. Mỗi ô vuông biểu diễn cho một dặm vuông.



LỜI GIẢI



1. $\frac{-4+6}{2}$; do đó trung điểm = 1

2. trung điểm $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

3. $\left(\frac{2+4}{2}, \frac{3+8}{2}\right) = \left(3, \frac{11}{2}\right)$

4. $\left(\frac{-2+1}{2}, \frac{-3+1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, -1\right)$

5. $(-3, -1) = \left(\frac{-7+x}{2}, \frac{-5+y}{2}\right)$. Vậy $(x, y) = (1, 3)$

6. $RT = |r - t|$ hoặc $|t - r|$

7. $MN = |-4 - 2| = 6$

8. $\sqrt{(0 - (-5))^2 + (-4 - 8)^2}$; do đó $PR = 13$

9. $\sqrt{(5 - 2)^2 + (5 - 1)^2}$

Khoảng cách giữa nhà Lily và nhà Alex là 5 dặm.

Chương 33

CHỨNG MINH TAM GIÁC BẰNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ

PHÉP CHỨNG MINH TAM GIÁC
BẰNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ

PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẰNG TỌA ĐỘ luôn có bước vẽ hình trên mặt phẳng tọa độ. Ta có thể chứng minh các mệnh đề về hình đã vẽ bằng các định lý, tiên đề và CÔNG THỨC KHOẢNG CÁCH và TRUNG ĐIỂM.

Khi chứng minh tam giác bằng phương pháp tọa độ ta cần:

1. Vẽ hình và đặt tên các điểm trên mặt phẳng tọa độ.
2. Viết các công thức ta sẽ sử dụng để xây dựng phần chứng minh bằng phương pháp tọa độ.

3. Nghĩ ra cách chứng minh và viết rõ các bước từ giả thiết đã cho dẫn tới điều phải chứng minh.

4. Viết mệnh đề cuối cùng để kết luận về điều phải chứng minh và tại sao điều đó đúng.

Các công thức ta có thể sử dụng trong phương pháp chứng minh bằng tọa độ:

$$\text{Công thức hệ số góc: } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\text{Công thức khoảng cách: } D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

SỬ DỤNG CÔNG THỨC KHOẢNG CÁCH

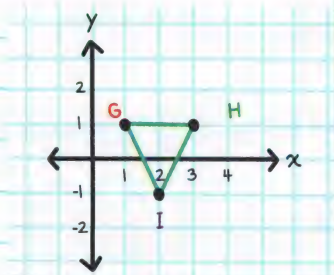
Khi biết trước tọa độ của một tam giác, ta có thể chứng minh tam giác đó cân bằng cách sử dụng công thức khoảng cách để chỉ ra tam giác đã cho có hai cạnh bằng nhau.

VÍ DỤ:

Giả thiết: $\triangle GHI$ có các đỉnh $G(1, 1)$, $H(3, 1)$, và $I(2, -1)$.

Chứng minh: $\triangle GHI$ cân.

Bước 1: Vẽ các điểm trên mặt phẳng tọa độ và nối lại. Điền tên các điểm.



Bước 2: Đưa ra công thức cần để chứng minh.

Công thức khoảng cách: $D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Bước 3: Viết các bước để chỉ ra tam giác có hai cạnh bằng nhau. tam giác cân

Chiều dài của \overline{GH} là: $D = \sqrt{(3 - 1)^2 + (1 - 1)^2}$

$$G = (x_1, y_1) = (1, 1)$$

$$H = (x_2, y_2) = (3, 1)$$

$$= \sqrt{(2^2 + 0^2)} = \sqrt{4} = 2$$

Chiều dài của \overline{HI} là: $D = \sqrt{(2 - 3)^2 + (-1 - 1)^2}$

$$H = (x_1, y_1) = (3, 1)$$

$$I = (x_2, y_2) = (2, -1)$$

$$= \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

Chiều dài của \overline{GI} là: $D = \sqrt{(2 - 1)^2 + (-1 - 1)^2}$

$$G = (x_1, y_1) = (1, 1)$$

$$I = (x_2, y_2) = (2, -1)$$

$$= \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

Bước 4: Viết kết luận.

Vì \overline{HI} và \overline{GI} có chiều dài bằng nhau nên chúng bằng nhau.

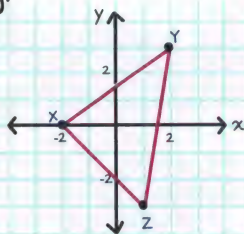
$\triangle GHI$ là tam giác cân vì nó có hai cạnh bằng nhau.

VÍ DỤ:

Giả thiết: $\triangle XYZ$ có các đỉnh $X(-2, 0)$, $Y(2, 3)$, và $Z(1, -3)$.

Chứng minh: $\triangle XYZ$ là tam giác thường.

Tam giác thường
không có hai cạnh nào
bằng nhau.



Công thức khoảng cách: $D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Tìm chiều dài các cạnh:

$$\overline{XY}: D = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{(2 + 2)^2 + 3^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\overline{YZ}: D = \sqrt{(1 - 2)^2 + (-3 - 3)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-6)^2} = \sqrt{37}$$

$$\overline{XZ}: D = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (-3 - 0)^2} = \sqrt{(1 + 2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18}$$

Vì ba cạnh có độ dài khác nhau nên không có cạnh nào bằng cạnh nào.

Vậy $\triangle XYZ$ là tam giác thường vì nó không có cạnh nào bằng nhau.

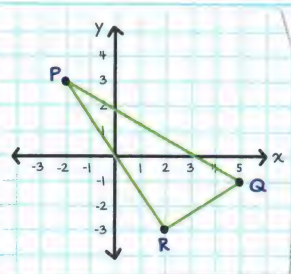
SỬ DỤNG CÔNG THỨC HỆ SỐ GÓC

Khi biết trước tọa độ của một tam giác vuông, ta có thể chứng minh tam giác đó có một góc 90° bằng cách sử dụng hệ số góc để chỉ ra hai cạnh của tam giác vuông góc với nhau.

VÍ DỤ:

Giả thiết: $\triangle PQR$ có các đỉnh $P(-2, 3)$, $Q(5, -1)$, và $R(2, -3)$.

Chứng minh: $\triangle PQR$ là tam giác vuông.



$$\text{Hệ số góc: } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Chứng minh $\angle PRQ$ là góc vuông bằng cách chỉ ra rằng \overline{PR} và \overline{QR} vuông góc với nhau.

Hệ số góc của \overline{PR} là: $\frac{-3-3}{2-(-2)} = \frac{-6}{2+2} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$

Hệ số góc của \overline{QR} là: $\frac{-3-(-1)}{2-5} = \frac{-3+1}{-3} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$

Vì hệ số góc của \overline{PR} và \overline{QR} là nghịch đảo âm của nhau nên chúng vuông góc.

Vậy $\angle PRQ$ là góc vuông.

$\triangle PQR$ là tam giác vuông vì nó có một góc vuông.



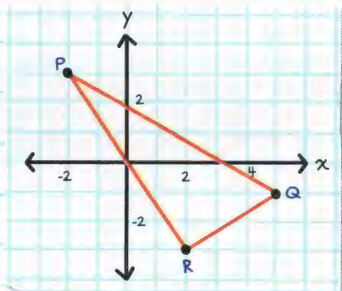
SỬ DỤNG ĐỊNH LÝ PYTAGO

Một cách khác để chứng minh tam giác vuông là sử dụng định lý Pytago.

VÍ DỤ:

Tìm chiều dài mỗi cạnh của tam giác đã cho rồi chỉ ra rằng chúng thỏa mãn đẳng thức $a^2 + b^2 = c^2$.

Đầu tiên ta sử dụng công thức khoảng cách để tìm chiều dài mỗi cạnh của tam giác.



$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\overline{PQ}: D = \sqrt{(5 - (-2))^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{7^2 + (-4)^2} = \sqrt{49 + 16} \\ = \sqrt{65}$$

$$\overline{QR}: D = \sqrt{(2 - 5)^2 + (-3 - (-1))^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 4} \\ = \sqrt{13}$$

$$\overline{PR}: D = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (-3 - 3)^2} = \sqrt{(4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{16 + 36} \\ = \sqrt{52}$$

Sau đó ta sử dụng định lý Pytago

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$(\sqrt{13})^2 + (\sqrt{52})^2 = (\sqrt{65})^2$$

$$13 + 52 = 65$$

$$65 = 65$$

$\triangle PQR$ là tam giác vuông vì số đo các cạnh của nó thỏa mãn định lý Pytago.





BÀI TẬP

1. Giả thiết: $\triangle LMN$ có các đỉnh $L(-2, -1)$, $M(0, 3)$, và $N(1, 0)$.

Chứng minh: $\triangle LMN$ là tam giác cân.

2. Giả thiết: $\triangle STU$ có các đỉnh $S(1, 2)$, $T(5, 0)$, và $U(3, -3)$.

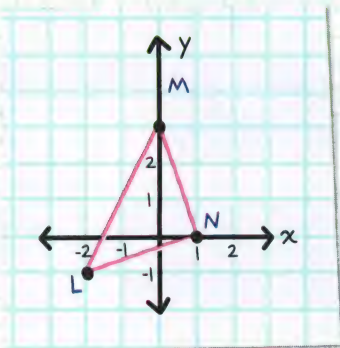
Chứng minh: $\triangle STU$ là tam giác thường.

3. Giả thiết: $\triangle XYZ$ có các đỉnh $X(-2, 0)$, $Y(-3, 3)$, và $Z(4, 2)$.

Chứng minh: $\triangle XYZ$ là tam giác vuông.

LỜI GIẢI

1.



$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\overline{LM}: \sqrt{(0 - (-2))^2 + (3 - (-1))^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$$

$$\overline{MN}: \sqrt{(1 - 0)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$$

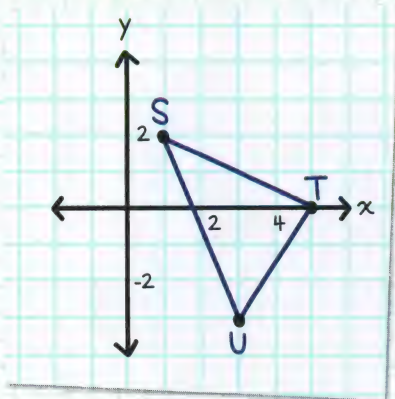
$$\overline{LN}: \sqrt{(1 - (-2))^2 + (0 - (-1))^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

Vì \overline{MN} và \overline{LN} có cùng chiều dài nên chúng bằng nhau.

$\triangle LMN$ là tam giác cân vì nó có hai cạnh bằng nhau.

LỜI GIẢI

2.



$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\overline{ST}: \sqrt{(5-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20}$$

$$\overline{TU}: \sqrt{(3-5)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

$$\overline{SU}: \sqrt{(3-0)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$$

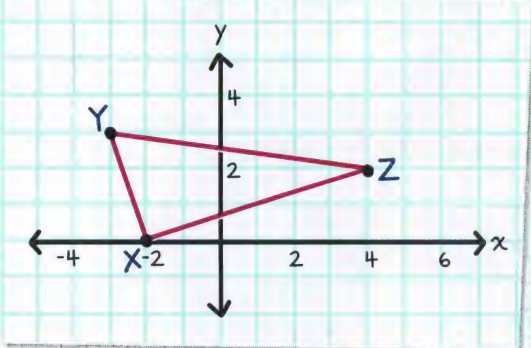
Vì ba cạnh có chiều dài khác nhau nên không có cạnh nào bằng cạnh nào.

$\triangle STU$ là tam giác thường vì nó không có cạnh nào bằng nhau.

LỜI GIẢI



3.



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\overline{XY}: \frac{3 - 0}{-2 - (-2)} = \frac{3}{-1} = -3$$

$$\overline{XZ}: \frac{2 - 0}{4 - (-2)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Vì \overline{XY} và \overline{XZ} có hệ số góc là nghịch đảo âm của nhau nên chúng vuông góc. Vậy $\angle YXZ$ là góc vuông.

$\triangle XYZ$ là tam giác vuông vì nó có một góc vuông.

LỜI GIẢI



Cách giải khác:

Công thức khoảng cách: $D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$$\overline{XY}: \sqrt{(-3 - (-2))^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2} = \sqrt{10}$$

$$\overline{YZ}: \sqrt{(4 - (-3))^2 + (2 - 3)^2} = \sqrt{(7)^2 + (-1)^2} = \sqrt{50}$$

$$\overline{XZ}: \sqrt{(4 - (-2))^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{(6)^2 + (2)^2} = \sqrt{40}$$

Sử dụng định lý Pytago:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$(\sqrt{10})^2 + (\sqrt{40})^2 = (\sqrt{50})^2$$

$$10 + 40 = 50$$

$$50 = 50$$

$\triangle XYZ$ là tam giác vuông vì nó có chiều dài các cạnh thỏa mãn định lý Pytago.

Chương 34

CHỨNG MINH TỨ GIÁC BẰNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ

PHÉP CHỨNG MINH TỨ GIÁC BẰNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ

Ta có thể chứng minh các mệnh đề về hình tứ giác đã vẽ trên mặt phẳng tọa độ bằng các công thức khoảng cách và trung điểm.

Khi chứng minh tứ giác bằng phương pháp tọa độ ta cần:

1. Vẽ hình và đặt tên các điểm trên mặt phẳng tọa độ.
2. Viết các công thức ta sẽ sử dụng để xây dựng phần chứng minh bằng phương pháp tọa độ.
3. Nghĩ ra cách chứng minh và viết rõ các bước từ giả thiết đã cho dẫn tới điều phải chứng minh.

4. Viết mệnh đề cuối cùng để kết luận về điều phải chứng minh và tại sao điều đó đúng.

Các phương pháp để chứng minh một tứ giác là hình bình hành:

PHƯƠNG PHÁP	CÔNG THỨC
Chỉ ra hai cặp cạnh đối song song.	Hệ số góc: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
Chỉ ra tứ giác có một cặp cạnh song song và bằng nhau.	Hệ số góc: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ Khoảng cách: $D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
Chỉ ra hai cặp cạnh đối bằng nhau.	Khoảng cách: $D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



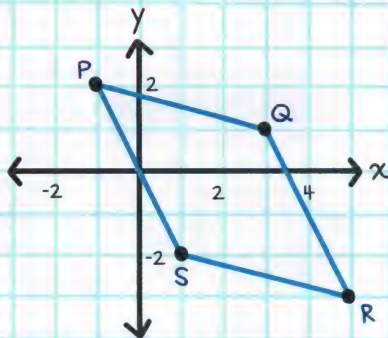
SỬ DỤNG CÔNG THỨC HỆ SỐ GÓC

Ta có thể sử dụng công thức hệ số góc để chỉ ra hai cặp cạnh đối trong một hình bình hành song song với nhau.

VÍ DỤ:

Giả thiết: Tứ giác PQRS có các đỉnh $P(-1, 2)$, $Q(3, 1)$, $R(5, -3)$, và $S(1, -2)$.

Chứng minh: Tứ giác PQRS là hình bình hành.



Tìm hệ số góc của mỗi cạnh.

Nếu hai cạnh đối của tứ giác PQRS có cùng hệ số góc thì chúng song song.

$$\text{Công thức hệ số góc: } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\overline{PQ} \text{ có hệ số góc là: } \frac{1-2}{3-(-1)} = \frac{-1}{3+1} = -\frac{1}{4}$$

$$\overline{RS} \text{ có hệ số góc là: } \frac{-2-(-3)}{1-5} = \frac{-2+3}{-4} = -\frac{1}{4}$$

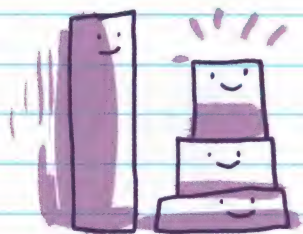
\overline{PQ} và \overline{RS} có cùng hệ số góc, vậy chúng song song.

$$\overline{PS} \text{ có hệ số góc là: } \frac{-2-2}{1-(-1)} = \frac{-4}{1+1} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\overline{QR} \text{ có hệ số góc là: } \frac{-3-1}{5-3} = \frac{-4}{2} = -2$$

\overline{PS} và \overline{QR} có cùng hệ số góc, vậy chúng song song.

Tứ giác PQRS là hình bình hành
vì cả hai cặp cạnh đối của nó đều
song song.

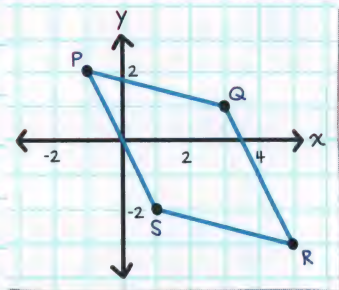


SỬ DỤNG CÔNG THỨC HỆ SỐ GÓC VÀ KHOẢNG CÁCH

Ta có thể sử dụng công thức hệ số góc và khoảng cách để chứng minh một tứ giác là hình bình hành bằng cách chỉ ra một cặp cạnh đối song song và bằng nhau.

VÍ DỤ:

Chứng minh: Tứ giác PQRS có một cặp cạnh đối song song và bằng nhau.



$$\text{Công thức hệ số góc: } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

$$\text{Công thức khoảng cách: } D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\overline{PQ} \text{ có hệ số góc là: } \frac{1-2}{3-(-1)} = \frac{-1}{3+1} = -\frac{1}{4}$$

$$\overline{RS} \text{ có hệ số góc là: } \frac{-2-(-3)}{1-5} = \frac{-2+3}{-4} = -\frac{1}{4}$$

\overline{PQ} và \overline{RS} có cùng hệ số góc, vậy chúng song song.

$$\overline{PQ} \text{ có độ dài là: } D = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$$

$$\overline{RS} \text{ có độ dài là: } D = \sqrt{(5 - 1)^2 + (-3 - (-2))^2} = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$$

\overline{PQ} và \overline{RS} có cùng độ dài, vậy chúng bằng nhau.

Tứ giác PQRS là hình bình hành vì nó có một cặp cạnh đối song song và bằng nhau.

SỬ DỤNG CÔNG THỨC KHOẢNG CÁCH

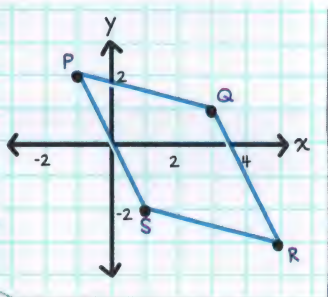
Ta có thể sử dụng công thức khoảng cách để chứng minh một tứ giác là hình bình hành bằng cách chỉ ra cả hai cặp cạnh đối bằng nhau.

VÍ DỤ:

Chứng minh: Tứ giác PQRS là hình bình hành.

Công thức khoảng cách:

$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



$$\overline{PQ} \text{ có độ dài là: } D = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{4^2 + (-1)^2} \\ = \sqrt{17}$$

$$\overline{RS} \text{ có độ dài là: } D = \sqrt{(5 - 1)^2 + (-3 - (-2))^2} = \sqrt{4^2 + (-1)^2} \\ = \sqrt{17}$$

\overline{PQ} và \overline{RS} có cùng độ dài, vậy chúng bằng nhau.

$$\overline{PS} \text{ có độ dài là: } D = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (-2 - 2)^2} = \sqrt{2^2 + (-4)^2} \\ = \sqrt{20}$$

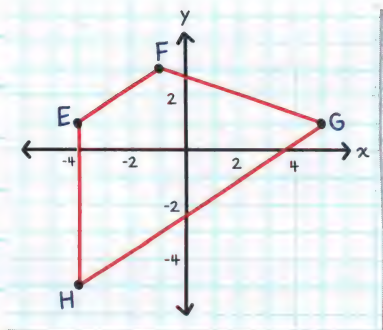
$$\overline{QR} \text{ có độ dài là: } D = \sqrt{(5 - 3)^2 + (-3 - 1)^2} = \sqrt{2^2 + (-4)^2} \\ = \sqrt{20}$$

\overline{PS} và \overline{QR} có cùng độ dài, vậy chúng bằng nhau.

Tứ giác PQRS là hình bình hành vì nó có hai cặp cạnh đối bằng nhau.



VÍ DỤ: Một hình thang có đúng một cặp cạnh song song. Hãy chỉ ra một cặp cạnh đối song song, sau đó chỉ ra cặp cạnh kia không song song.



Giả thiết: Tứ giác EFGH có các đỉnh $E(-4, 1)$, $F(-1, 3)$, $G(5, 1)$ và $H(-4, -5)$

Chứng minh: Tứ giác EFGH là hình thang.

Hệ số góc: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

\overline{EF} có hệ số góc là:

$$\frac{3-1}{-1-(-4)} = \frac{2}{-1+4} = \frac{2}{3}$$

\overline{GH} có hệ số góc là:

$$\frac{-5-1}{-4-5} = \frac{-6}{-9} = \frac{2}{3}$$

\overline{EF} và \overline{GH} có cùng hệ số góc, vậy chúng song song.

\overline{EH} có hệ số góc là:

$$\frac{-5-1}{-4-(-4)} = \frac{-6}{0}$$

Hệ số góc này không xác định (nó là đường thẳng đứng).

\overline{FG} có hệ số góc là:

$$\frac{1-3}{5-(-1)} = \frac{-2}{5+1} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

\overline{EH} và \overline{FG} có hệ số góc khác nhau, vậy chúng không song song.

Tứ giác EFGH là một hình thang vì nó có đúng một cặp cạnh song song.





BÀI TẬP

Với câu 1 và 2, sử dụng công thức hệ số góc.

1. Giả thiết: Tứ giác ABCD có các đỉnh $A(2, 3)$, $B(6, 4)$, $C(7, 0)$ và $D(3, -1)$.

Chứng minh: Tứ giác ABCD là hình bình hành.

2. Giả thiết: Tứ giác WXYZ có các đỉnh $W(1, 1)$, $X(5, 5)$, $Y(7, 3)$ và $Z(3, -1)$.

Chứng minh: Tứ giác WXYZ là hình bình hành.

Với câu 3 và 4, sử dụng công thức hệ số góc.

3. Giả thiết: Tứ giác PQRS có các đỉnh $P(0, 5)$, $Q(4, 4)$, $R(5, 1)$ và $S(2, -1)$.

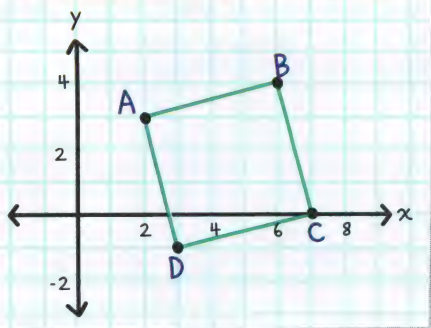
Chứng minh: Tứ giác PQRS là hình thang.

4. Giả thiết: Tứ giác JKLM có các đỉnh $J(-3, -3)$, $K(-4, 1)$, $L(2, 1)$ và $M(1, -3)$.

Chứng minh: Tứ giác JKLM là hình thang.

LỜI GIẢI

1.



Công thức hệ số góc: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$\overline{AB} \text{ có hệ số góc là: } \frac{4-3}{6-2} = \frac{1}{4}$$

$$\overline{CD} \text{ có hệ số góc là: } \frac{-1-0}{3-7} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

\overline{AB} và \overline{CD} có cùng hệ số góc, vậy chúng song song.

$$\overline{AD} \text{ có hệ số góc là: } \frac{-1-3}{3-2} = \frac{-4}{1} = -4$$

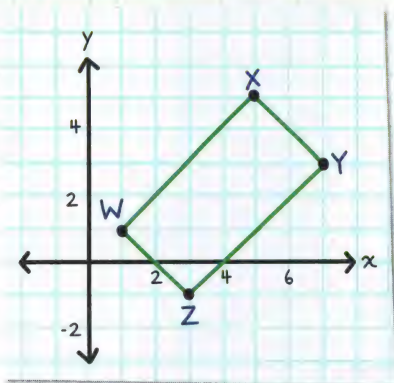
$$\overline{BC} \text{ có hệ số góc là: } \frac{0-4}{7-6} = \frac{-4}{1} = -4$$

\overline{AD} và \overline{BC} có cùng hệ số góc, vậy chúng song song.

Tứ giác ABCD là hình bình hành vì cả hai cặp cạnh đối của nó đều song song.

LỜI GIẢI

2.



Công thức hệ số góc: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

\overline{WX} có hệ số góc là: $\frac{5-1}{5-1} = \frac{4}{4} = 1$

\overline{YZ} có hệ số góc là: $\frac{-1-3}{3-7} = \frac{-4}{-4} = 1$

\overline{WX} và \overline{YZ} có cùng hệ số góc, vậy chúng song song.

\overline{WZ} có hệ số góc là: $\frac{-1-1}{3-1} = \frac{-2}{2} = -1$

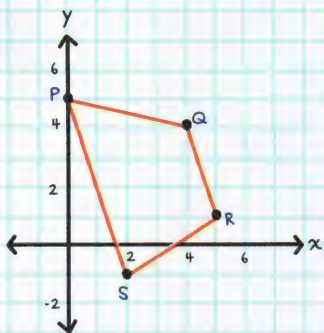
\overline{XY} có hệ số góc là: $\frac{3-5}{7-5} = \frac{-2}{2} = -1$

\overline{WZ} và \overline{XY} có cùng hệ số góc, vậy chúng song song.

Tứ giác WXYZ là hình bình hành vì cả hai cặp cạnh đối của nó đều song song.

LỜI GIẢI

3.



Công thức hệ số góc: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$\overline{PS} \text{ có hệ số góc là: } \frac{-1-4}{2-0} = \frac{-5}{2} = -2,5$$

$$\overline{QR} \text{ có hệ số góc là: } \frac{1-4}{5-4} = \frac{-3}{1} = -3$$

\overline{PS} và \overline{QR} có cùng hệ số góc, vậy chúng song song.

$$\overline{PQ} \text{ có hệ số góc là: } \frac{4-4}{4-0} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\overline{SR} \text{ có hệ số góc là: } \frac{1-(-1)}{5-2} = \frac{2}{3}$$

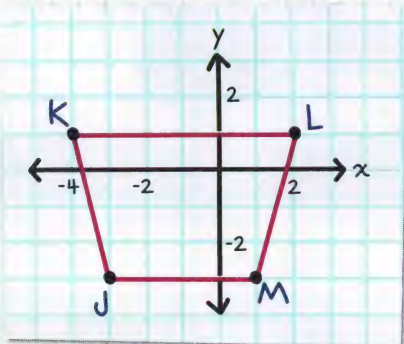
\overline{PQ} và \overline{SR} có hệ số góc khác nhau, vậy chúng không song song.

Tứ giác PQRS là hình thang vì nó có một cặp cạnh song song và một cặp cạnh không song song.

LỜI GIẢI



4.



Công thức hệ số góc: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$\overline{JM} \text{ có hệ số góc là: } \frac{-3 - (-3)}{1 - (-3)} = \frac{-3 + 3}{1 + 3} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\overline{KL} \text{ có hệ số góc là: } \frac{1 - 1}{2 - (-4)} = \frac{0}{6} = 0$$

\overline{JM} và \overline{KL} có cùng hệ số góc, vậy chúng song song.

$$\overline{KJ} \text{ có hệ số góc là: } \frac{-3 - 1}{-3 - (-4)} = \frac{-4}{-3 + 4} = \frac{-4}{1} = -4$$

$$\overline{LM} \text{ có hệ số góc là: } \frac{-3 - 1}{1 - 2} = \frac{-4}{-1} = 4$$

\overline{KJ} và \overline{LM} có hệ số góc khác nhau, vậy chúng không song song.

Tứ giác JKLM là hình thang vì nó có một cặp cạnh song song và một cặp cạnh không song song.

Chương 35

TỶ SỐ LƯỢNG GIÁC

LƯỢNG GIÁC được sử dụng để tìm các số đo trong tam giác.

Lượng giác là từ bắt nguồn từ tiếng Hy Lạp

- *trigonon* = tam giác
- *metron* = đo lường

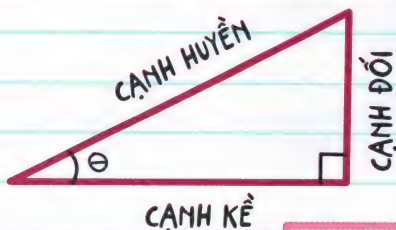
LƯỢNG GIÁC

nghiên cứu về mối quan hệ giữa độ dài cạnh và các góc trong tam giác

Các khái niệm quan trọng trong tam giác vuông:

CẠNH HUYỀN cạnh dài nhất

CẠNH ĐỐI cạnh đối diện góc θ



CẠNH KẸ cạnh kề với góc θ

θ (TÊ-TA) là chữ cái Hy Lạp được sử dụng để biểu diễn góc.

Các hàm lượng giác **SINE (SIN)**, **COSINE (COS)** và **TANGENT (TAN)** là mỗi tỷ số giữa các cạnh của một tam giác vuông. Ta sử dụng các hàm lượng giác để tìm độ đo các góc chưa biết hoặc chiều dài các cạnh chưa biết trong tam giác vuông.

Sine:

$$\sin \theta = \frac{\text{đối}}{\text{huyền}}$$

Cosine:

$$\cos \theta = \frac{\text{kề}}{\text{huyền}}$$

Tangent:

$$\tan \theta = \frac{\text{đối}}{\text{kề}}$$



Ta có thể ghi nhớ các hàm lượng giác bằng mẹo:

SĐH - CKH - TĐK

Sin = Đối/Huyền

Cos = Kề/Huyền

Tan = Đối/Kề

Hoặc



SĐH - CKH - TĐK

Sin Đi Học - Cos Không Hư - Tan Đoàn Kết

VÍ DỤ: Tìm $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$,

$\sin B$, $\cos B$ và $\tan B$.

$$\sin A = \frac{\text{đối } \angle A}{\text{hypotenuse}} = \frac{12}{13}$$

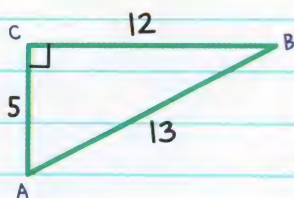
$$\cos A = \frac{\text{kề } \angle A}{\text{hypotenuse}} = \frac{5}{13}$$

$$\tan A = \frac{\text{đối } \angle A}{\text{kề } \angle A} = \frac{12}{5}$$

$$\sin B = \frac{\text{đối } \angle B}{\text{hypotenuse}} = \frac{5}{13}$$

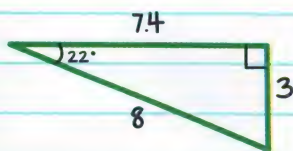
$$\cos B = \frac{\text{kề } \angle B}{\text{hypotenuse}} = \frac{12}{13}$$

$$\tan B = \frac{\text{đối } \angle B}{\text{kề } \angle B} = \frac{5}{12}$$



VÍ DỤ: Tìm $\sin 22^\circ$.

$$\sin 22^\circ = \frac{\text{đối}}{\text{hypotenuse}} = \frac{3}{8}$$



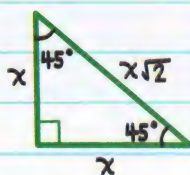
TAM GIÁC VUÔNG ĐẶC BIỆT

Tam giác vuông đặc biệt là một tam giác có một tính chất về số đo (góc hoặc chiều dài cạnh) giúp ta tính toán dễ dàng hơn hoặc cho ta thêm những công thức tính. Hai tam giác vuông phổ biến nhất có các số đo đặc biệt là:

$45^\circ-45^\circ-90^\circ$

cạnh huyền = cạnh góc vuông $\times \sqrt{2}$

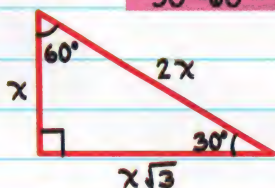
Tất cả các tam giác có độ đo $45^\circ-45^\circ-90^\circ$ đều đồng dạng.



TỶ SỐ CÁC
CẠNH
 $1:1:\sqrt{2}$

Tam giác có độ đo $45^\circ-45^\circ-90^\circ$ là tam giác vuông cân.

$30^\circ-60^\circ-90^\circ$



TỶ SỐ CÁC
CẠNH
 $1:2:\sqrt{3}$

đổi diện góc lớn
hơn (60°)

đổi diện góc nhỏ
hơn (30°)

cạnh góc vuông dài hơn = cạnh góc vuông ngắn hơn $\times \sqrt{3}$

cạnh huyền = cạnh góc vuông ngắn hơn $\times 2$

Tất cả các tam giác có độ đo $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ đều đồng dạng.

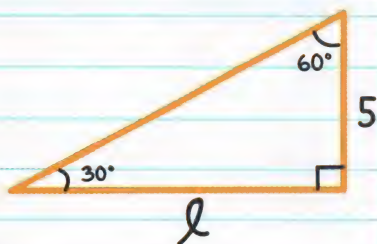
VÍ DỤ: Tìm giá trị của l .

Giả thiết:

cạnh góc vuông dài hơn = l

cạnh góc vuông ngắn hơn = 5

Các góc = $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$



Sử dụng tỷ số của một tam giác $30^\circ-60^\circ-90^\circ$, ta có:

cạnh góc vuông dài hơn = cạnh góc vuông ngắn hơn $\times \sqrt{3}$

$$l = 5\sqrt{3}$$

VÌ GIẢ THIẾT ĐÃ CHO
CÁC GIÁ TRỊ "CẠNH GÓC
VUÔNG DÀI HƠN" VÀ "CẠNH
GÓC VUÔNG NGẮN HƠN" NÊN
TA CÓ THỂ SỬ DỤNG PHƯƠNG
TRÌNH NÀY



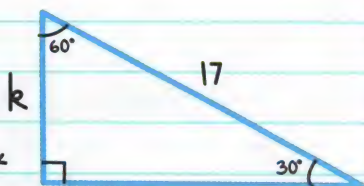
VÍ DỤ: Tìm giá trị của k .

Giả thiết:

cạnh góc vuông ngắn hơn = k

cạnh huyền = 17

Các góc = $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$



Sử dụng tỷ số của một tam giác $30^\circ-60^\circ-90^\circ$, ta có:
cạnh huyền = cạnh góc vuông ngắn hơn $\times 2$

$$17 = k \times 2$$

$$k = \frac{17}{2} = 8\frac{1}{2}$$

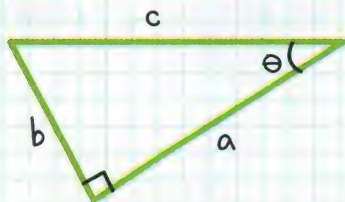
VÌ GIẢ THIẾT ĐÃ CHO
CÁC GIÁ TRỊ "CẠNH GÓC
VUÔNG NGẮN HƠN" VÀ "CẠNH
HUYỀN" NÊN TA CÓ THỂ SỬ
DỤNG PHƯƠNG TRÌNH NÀY



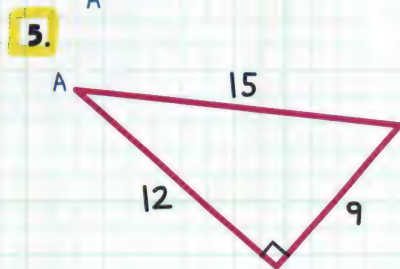
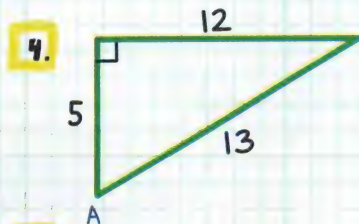
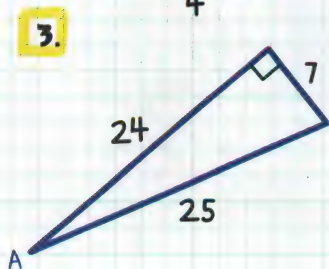
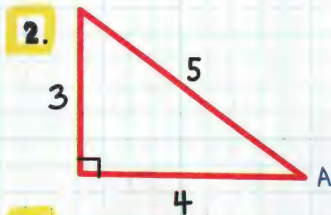


BÀI TẬP

1. Tìm $\sin \theta$, $\cos \theta$, và $\tan \theta$.



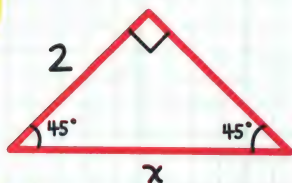
Từ câu 2-5, hãy tìm $\sin A$, $\cos A$, và $\tan A$.



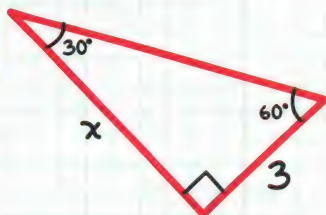
BÀI TẬP

Từ câu 6-8, hãy tìm giá trị của x .

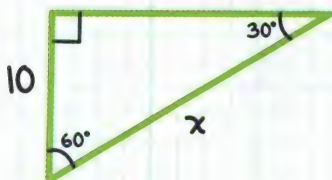
6.



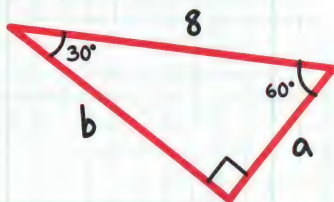
8.



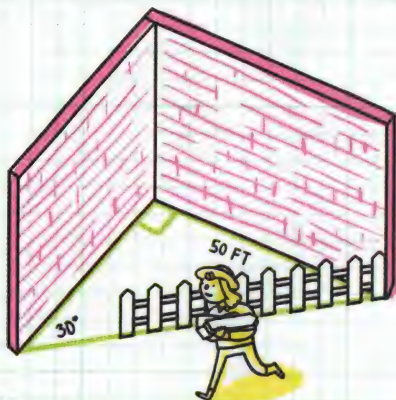
7.



9.



10. Caitlyn đang rào một góc vườn. Hỏi cô ấy cần hàng rào dài bao nhiêu để rào phần vườn như trong hình vẽ?



LỜI GIẢI



1. $\sin \theta = \frac{b}{c}$, $\cos \theta = \frac{a}{c}$, $\tan \theta = \frac{b}{a}$

2. $\sin A = \frac{3}{5}$, $\cos A = \frac{4}{5}$, $\tan A = \frac{3}{4}$

3. $\sin A = \frac{7}{25}$, $\cos A = \frac{24}{25}$, $\tan A = \frac{7}{24}$

4. $\sin A = \frac{12}{13}$, $\cos A = \frac{5}{13}$, $\tan A = \frac{12}{5}$

5. $\sin A = \frac{3}{5}$, $\cos A = \frac{4}{5}$, $\tan A = \frac{3}{4}$

6. $x = 2\sqrt{2}$

7. $x = 20$

8. $x = 3\sqrt{3}$

9. $a = 4$, $b = 4\sqrt{3}$

10. 100 ft

Chương 36

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

Ta sử dụng **CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC** để tìm các số đo góc hoặc chiều dài cạnh chưa biết.

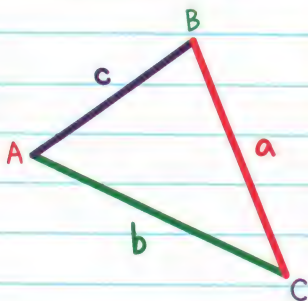
CÔNG THỨC SINE

Công thức về sine liên quan đến chiều dài cạnh của tam giác không vuông với các góc của nó có sử dụng hàm sine.

CÔNG THỨC SINE

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$\angle A$, $\angle B$, và $\angle C$ lần lượt
đối diện với a , b , và c .



VÍ DỤ: Tìm giá trị của x .

Sử dụng công thức sine với

$$\angle A = 42^\circ, a = 10, \angle C = 94^\circ,$$

và $c = x$:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$$

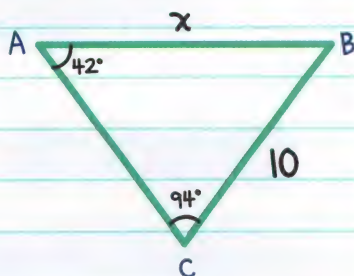
$$\frac{\sin 42^\circ}{10} \quad \times \quad \frac{\sin 94^\circ}{x}$$

$$x \sin 42^\circ = 10 \sin 94^\circ$$

$$\frac{x \sin 42^\circ}{\sin 42^\circ} = \frac{10 \sin 94^\circ}{\sin 42^\circ}$$

$$x \approx 14.9$$

xấp xỉ, hoặc
bằng khoảng



Nhân chéo.

Chia cả hai vế cho $\sin 42^\circ$.

Sử dụng máy tính bỏ túi.

Làm tròn đến chữ số thập
phân thứ nhất.

Nhớ để máy tính ở
chế độ đo độ



Để tìm góc chưa biết trong hàm lượng giác như ($\sin \theta = \frac{1}{2}$), ta sử dụng **HÀM LƯỢNG GIÁC NGƯỢC**.

HÀM LƯỢNG GIÁC NGƯỢC: Các hàm ngược lại so với hàm lượng giác thông thường. Chúng được ký hiệu là \sin^{-1} , \cos^{-1} , \tan^{-1} .

-1 không phải là số mũ.
Nó chỉ có nghĩa là "ngược lại."

Nếu $\sin \theta = \frac{a}{c}$ thì hàm sine ngược là $\sin^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) = \theta$

Nếu $\cos \theta = \frac{b}{c}$ thì hàm cosine ngược là $\cos^{-1}\left(\frac{b}{c}\right) = \theta$

Nếu $\tan \theta = \frac{a}{b}$ thì hàm tangent ngược là $\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) = \theta$

Nếu ta biết tỷ số lượng giác nhưng không biết góc thì ta có thể dùng hàm ngược để tìm ra góc đó.

Vậy, nếu $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, thì $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30^\circ$.

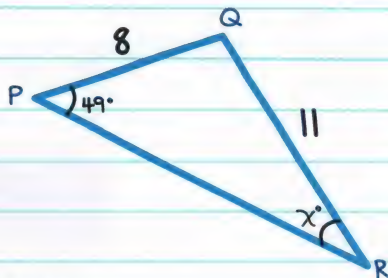


VÍ DỤ: Tìm giá trị của x .

Sử dụng công thức sine với $m\angle P = 49^\circ$, $p = 11$, $m\angle R = x^\circ$, và $r = 8$.

$$\frac{\sin P}{p} = \frac{\sin R}{r}$$

$$\frac{\sin 49^\circ}{11} \quad \text{↔} \quad \frac{\sin x^\circ}{8}$$



$$8 \sin 49^\circ = 11 \sin x^\circ$$

Nhân chéo.

$$\frac{8 \sin 49^\circ}{11} = \frac{11 \sin x^\circ}{11}$$

Chia cả hai vế cho 11.

$$\frac{8}{11} \sin 49^\circ = \sin x^\circ$$

Rút gọn.

$$\sin x^\circ = 0,5488 \dots$$

Sử dụng máy tính bỏ túi.

$$x = \sin^{-1}(0,5488)$$

Sử dụng hàm ngược của sine (\sin^{-1}).

$$x \approx 33,3$$

Sử dụng máy tính bỏ túi.

Làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất.

CÔNG THỨC COSINES

Khi ta biết chiều dài hai cạnh của một tam giác và số đo góc xen giữa thì ta có thể tìm chiều dài cạnh thứ ba bằng

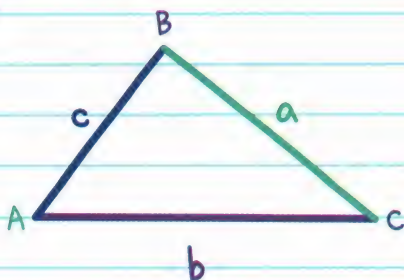
CÔNG THỨC COSINE.

CÔNG THỨC COSINE

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

c (chiều dài cạnh)

đối diện góc C .

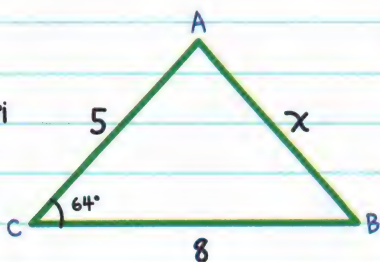


VÍ DỤ: Tìm giá trị của x .

Sử dụng công thức cosine với

$m\angle C = 64^\circ$, $c = x$, $a = 8$, và

$b = 5$.



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$x^2 = 8^2 + 5^2 - 2(8)(5) \cos 64^\circ$$

$$x^2 = 64 + 25 - 80(0,43837) \dots$$
 Sử dụng máy tính bỏ túi.

$$x^2 \approx 53,93$$

$$\sqrt{x^2} \approx \sqrt{53,93}$$

Lấy căn bậc hai cả hai vế.

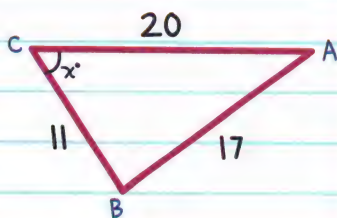
$$x \approx 7.3$$

VÍ DỤ: Tìm giá trị của x .

Sử dụng công thức cosine với

$m\angle C = x^\circ$, $c = 17$, $a = 11$, và

$b = 20$.



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$17^2 = 11^2 + 20^2 - 2 \times 11 \times 20 \cos x^\circ$$

$$289 = 121 + 400 - 440 \cos x^\circ$$

$$-232 = -440 \cos x^\circ$$

$$\frac{232}{440} = \cos x^\circ$$

$$x = \cos^{-1}\left(\frac{232}{440}\right)$$

Sử dụng hàm cosine ngược.

$$x \approx 58.2$$

Sử dụng máy tính bỏ túi.

Làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất.

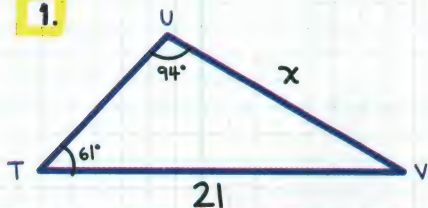




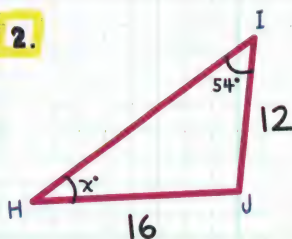
BÀI TẬP

Từ câu 1-3, sử dụng công thức cosine để tìm giá trị của x .
Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất.

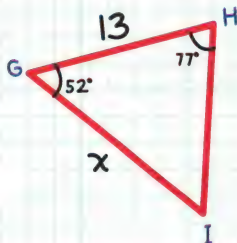
1.



2.

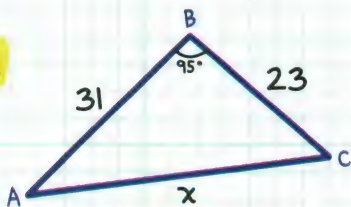


3.

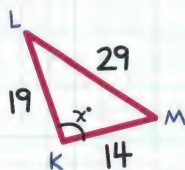


Từ câu 4-6, sử dụng công thức cosine để tìm giá trị của x . Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất.

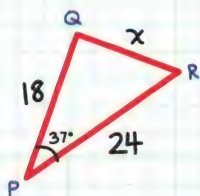
4.



5.



6.



LỜI GIẢI



1. $\sin \frac{94}{21} = \sin \frac{61}{x}$; do đó $x = 18,4$

2. $\sin \frac{54}{16} = \sin \frac{x}{12}$; do đó $x = 37,4$

3. $\sin \frac{77}{x} = \sin \frac{51}{13}$; do đó $x = 16,3$

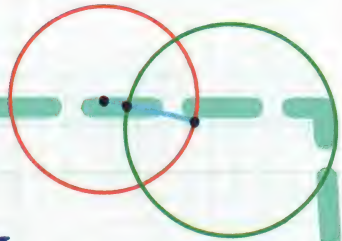
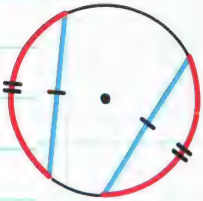
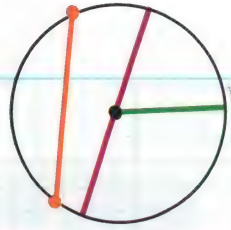
4. $x^2 = 31^2 + 23^2 - 2(31)(23) \cos 95$; $x = 40,2$

5. $29^2 = 14^2 + 19^2 - 2(14)(19) \cos x$; $x = 122,3$

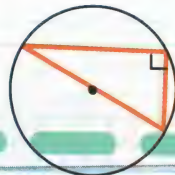
6. $x^2 = 18^2 + 24^2 - 2(18)(24) \cos 37$; $x = 14,5$

BÀI

8



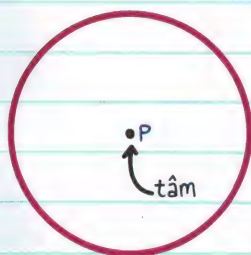
Đường tròn



Chương 37

KIẾN THỨC CƠ BẢN VỀ ĐƯỜNG TRÒN

ĐƯỜNG TRÒN (\odot) là tập hợp tất cả các điểm trên một mặt phẳng cách đều một điểm được gọi là **TÂM**.



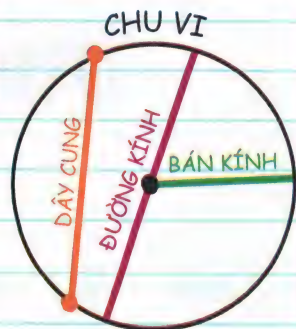
Ta gọi tên đường tròn bằng điểm tâm.
Ví dụ: Đường tròn P.

CÁC THÀNH PHẦN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

CHU VI ĐƯỜNG TRÒN (C):

Khoảng cách bao quanh đường tròn (chu vi).

DÂY CUNG: Đoạn thẳng có hai đầu nằm trên đường tròn.



ĐƯỜNG KÍNH (d): Một dây cung đi qua tâm của đường tròn. Đường kính gấp đôi chiều dài bán kính:
 $d = 2r$

BÁN KÍNH (r): Một đoạn thẳng có một đầu ở tâm còn đầu kia nằm trên đường tròn. Bán kính bằng một nửa chiều dài đường kính:

Công thức: $r = \frac{1}{2} d$

Các thuật ngữ **RADIUS** (Bán kính) và **DIAMETER** (Đường kính) mô tả các phân đoạn của một đường tròn cũng như các số đo

Pi (π): Tỷ số của chu vi đường tròn với đường kính:

Công thức: $\pi = \frac{\text{chu vi đường tròn}}{\text{đường kính}}$ hoặc $\pi = \frac{C}{d}$

Vì ta không thể tính được giá trị chính xác của π nên ta thường dùng hai giá trị xấp xỉ:

3,14 khi ta cần số thập phân

hoặc

$\frac{22}{7}$ khi ta cần phân số

CHU VI ĐƯỜNG TRÒN

Chu vi đường tròn, C , của một đường tròn là π lần đường kính.

$$\text{Chu vi đường tròn} = \pi \times \text{đường kính} \rightarrow C = \pi d$$

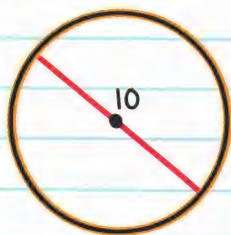
Vì đường kính gấp đôi độ dài bán kính nên ta cũng có thể tìm chu vi đường tròn bằng công thức này:

$$C = 2\pi r$$

VÍ DỤ: Tìm chu vi của đường tròn đã cho.

$$\begin{aligned} C &= \pi d \\ &= \pi(10) \\ &= 10\pi \end{aligned}$$

Viết số trước
ký hiệu pi.

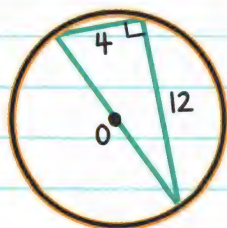


10π là kết quả chính xác.

Vì π xấp xỉ 3,14 nên $10\pi \approx 10(3,14) = 31,4$.

VÍ DỤ: Tìm chu vi của $\odot O$.

1. Tìm đường kính bằng định lý Pytago.



$$c^2 = a^2 + b^2$$

Đường kính (d) là cạnh huyền của tam giác trong hình vẽ:

$$d^2 = 4^2 + 12^2$$

$$d^2 = 160$$

$$d = \sqrt{160}$$

$$d = \sqrt{160} = \sqrt{16 \times 10} = \sqrt{16} \times \sqrt{10} = 4\sqrt{10}$$

2. Sử dụng kết quả vừa tìm được để tìm chu vi đường tròn.

$$C = \pi d$$

$$= \pi(4\sqrt{10})$$

$$= 4\pi\sqrt{10} \approx 4(3,14)(\sqrt{10}) \approx 39,7$$

Ta có thể sử dụng kiến thức đã biết về chu vi đường tròn để tìm số đo các thành phần của đường tròn đó.

VÍ DỤ: Tìm bán kính và đường kính của một đường tròn có chu vi là 16π .

$$C = 2\pi r$$

$$\text{Đường kính} = 2r$$

$$16\pi = 2\pi r$$

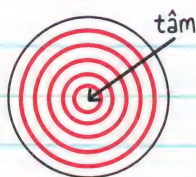
$$d = 2(8)$$

$$r = \frac{16\pi}{2\pi}$$

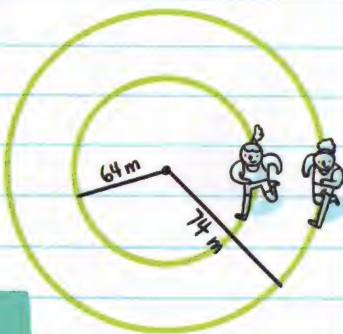
$$d = 16$$

$$r = 8$$

ĐƯỜNG TRÒN ĐỒNG TÂM là các đường tròn có cùng tâm.



VÍ DỤ: Dani và Niki chạy trên đường chạy hình tròn. Dani chạy ở làn trong, làn này cách tâm 64 mét. Niki chạy ở làn ngoài, làn này cách tâm 74 mét. Mỗi người chạy đúng một vòng. Hỏi Niki chạy xa hơn Dani bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất.



Tìm khoảng cách mỗi cô gái chạy được (chính là chu vi đường chạy) rồi trừ hai kết quả cho nhau.

Bước 1: Tìm khoảng cách Dani chạy.

Khoảng cách Dani chạy là chu vi đường tròn bán kính 64m.

$$\begin{aligned}C &= 2\pi r \\&= 2\pi(64) \\&= 128\pi (\approx 402,1 \text{ m})\end{aligned}$$

Bước 2: Tìm khoảng cách Niki chạy.

Khoảng cách Niki chạy là chu vi đường tròn bán kính 74m.

$$\begin{aligned}C &= 2\pi r \\&= 2\pi(74) \\&= 148\pi (\approx 464,9 \text{ m})\end{aligned}$$

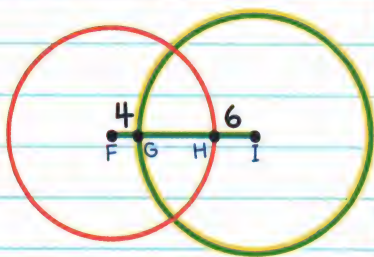
Bước 3: Trừ hai kết quả.

$$148\pi - 128\pi = 20\pi \approx 62,8$$

Niki chạy nhiều hơn Dani khoảng 62,8m.



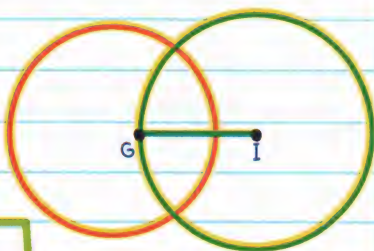
VÍ DỤ: Chu vi đường tròn $\odot I$ là 42π , $FG = 4$, và $HI = 6$.
Hãy tìm chu vi của $\odot F$.



Để tìm chu vi của $\odot F$, ta cần biết FH , nghĩa là trước tiên ta cần tìm GH .

Ta có thể tìm GH qua $\odot I$ (vì ta biết chu vi của nó).

Bước 1: Tìm GI qua $\odot I$.



$$C = 2\pi r$$

$$C = 42\pi$$

$$42\pi = 2\pi \times GI$$

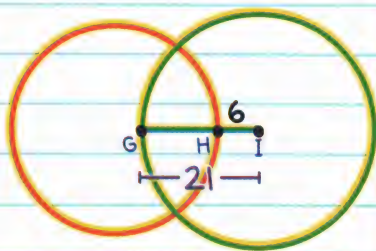
bán kính
của $\odot I$

$$\frac{42\pi}{2\pi} = \frac{2\pi \times GI}{2\pi}$$

Chia cả hai vế cho 2π (π sẽ bị triệt tiêu)

$$GI = 21$$

Bước 2: Tìm GH .



$$GI = GH + HI$$

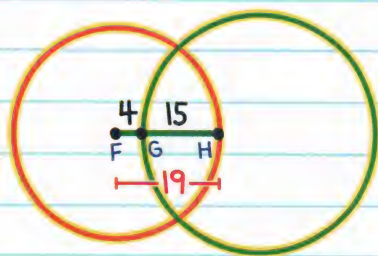
$$21 = GH + 6$$

$$GH = 15$$

Bước 3: Tìm chu vi $\odot F$.

Bán kính của $\odot F$ là:

$$FG + GH = 4 + 15 = 19$$

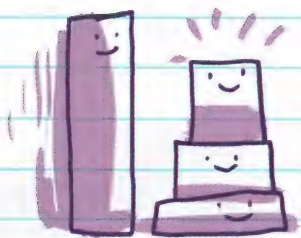


Chu vi của $\odot F$ là:

$$C = 2\pi r$$

$$= 2\pi(19)$$

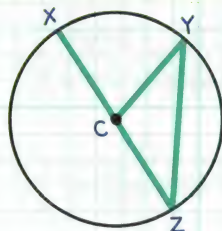
$$= 38\pi$$



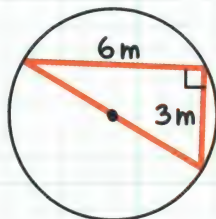


BÀI TẬP

1. Gọi tên tâm, một bán kính, một đường kính và một dây cung trong $\odot C$.



2. Tìm bán kính và đường kính của đường tròn có chu vi 51π .



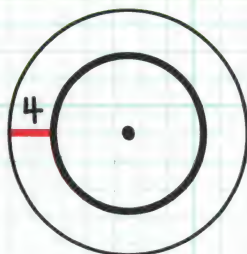
3. Tìm chu vi của đường tròn đã cho.

4. Một con chuột đồng chạy trên bánh xe có đường kính 5 inch. Hỏi mỗi vòng quay con chuột đi bao nhiêu inch (quay hết một vòng)? Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất.

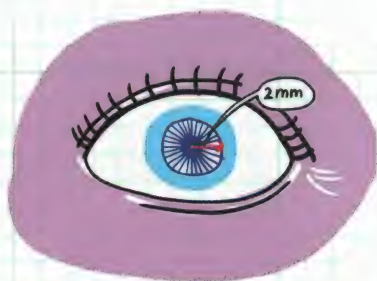


BÀI TẬP

5. Chu vi đường tròn lớn hơn trong hai đường tròn đồng tâm là 52π . Tìm chu vi của đường tròn nhỏ hơn.

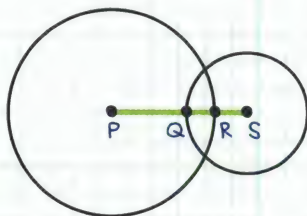


6. Ở ngoài trời, con người của Keisha có chu vi là $3\pi\text{mm}$. Khi cô ấy đi vào trong phòng thì bán kính con người cô ấy mở rộng 2mm . Lúc này chu vi của con người cô ấy là bao nhiêu?



Sử dụng hình vẽ sau đây cho câu 7 và 8.

Chu vi của $\odot P$ là 16π và $PQ = 6$.



7. Tìm QR.
8. Tìm chu vi của $\odot S$ biết $RS = 3$.

LỜI GIẢI



1. Tâm: C , bán kính: \overline{CX} , \overline{CY} , hoặc \overline{CZ} ; đường kính: \overline{XZ} ,
dây cung: \overline{YZ} hoặc \overline{XZ}

2. $r = \frac{51}{2}$, $d = 51$

3. $d^2 = 6^2 + 3^2$, nên $d = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$$C = \pi d = 3\pi\sqrt{5} \text{ m} \approx 21,1\text{m}$$

4. $C = \pi d = 5\pi \approx 15,7\text{in.}$

5. Đường tròn lớn hơn:

$$C = 2\pi r$$

$$52\pi = 2\pi r$$

$$r = \frac{52\pi}{2\pi} = 26$$

Đường tròn nhỏ hơn:

$$r = 26 - 4 = 22$$

$$C = 2\pi r = 2\pi(22) = 44\pi \approx 138,2$$

6. Ngoài trời:

$$C = 2\pi r$$

$$3\pi = 2\pi r$$

$$r = \frac{3\pi}{2\pi} = 1.5$$

Trong phòng:

$$r = 1.5 + 2 = 3.5$$

$$C = 2\pi r = 2\pi(3.5) = 7\pi \text{ mm} \approx 22.0 \text{ mm}$$

7. $C = 2\pi r$

$$16\pi = 2\pi \times PR$$

$$PR = \frac{16\pi}{2\pi} = 8$$

$$QR = PR - PQ = 8 - 6 = 2$$

8. $QS = QR + RS = 2 + 3 = 5$

$$C = 2\pi \times QS = 2\pi(5) = 10\pi \approx 31.4$$

Chương 38

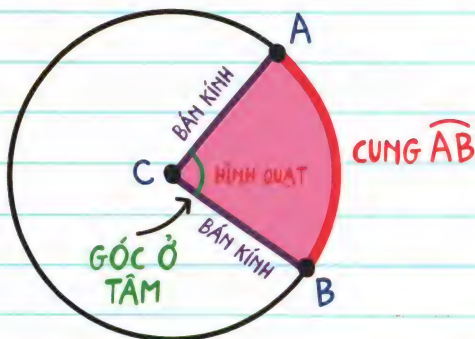
GÓC Ở TÂM VÀ CUNG TRÒN

GÓC Ở TÂM là một góc có đỉnh ở tâm đường tròn.

Các đoạn thẳng tạo nên góc ở tâm đều là các bán kính của đường tròn đó.

CUNG TRÒN là một phần của đường tròn. Ta có thể gọi tên các cung tròn theo hai đầu của nó, viết dưới dấu $\widehat{\hspace{1cm}}$: \widehat{AB}

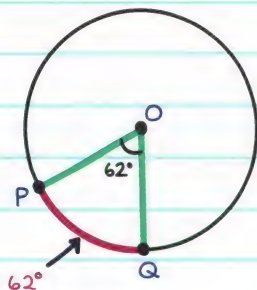
HÌNH QUẠT là một "lát" của hình tròn.



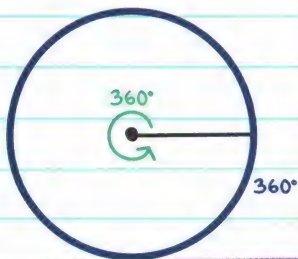
SỐ ĐO MỘT CUNG TRÒN bằng với số đo góc ở tâm của nó.

$m\angle POQ = 62^\circ$, vậy $m\widehat{PQ} = 62^\circ$

$m\widehat{PQ}$ được đọc là
"số đo của cung \widehat{PQ} ."



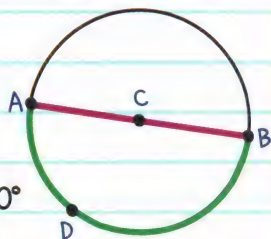
Trong toàn bộ hình tròn, số đo góc ở tâm bằng 360° và số đo của cung tròn cũng là 360° .



Một cung 180° là một
HÌNH BÀN NGUYỆT.

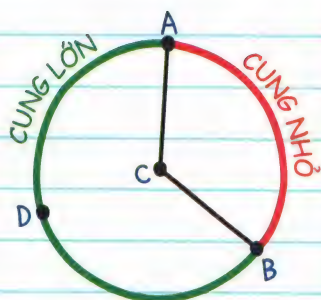
một nửa hình tròn

$m\widehat{ADB} = 180^\circ$



CUNG NHỎ: nhỏ hơn một nửa đường tròn (nhỏ hơn 180°)

CUNG LỚN: lớn hơn một nửa đường tròn (lớn hơn 180°)



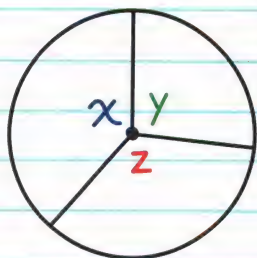
Cung nhỏ là \widehat{AB} và cung lớn là \widehat{ADB} .

Luôn dùng ba chữ cái để gọi tên một cung lớn.

Vì số đo của cả đường tròn là 360° :

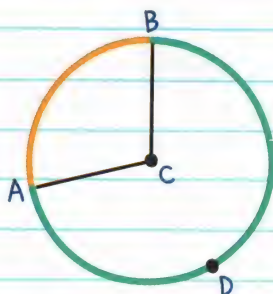
Góc ở tâm bằng 360° .

$$x^\circ + y^\circ + z^\circ = 360^\circ$$



Cung nhỏ và cung lớn của cùng một đường tròn cộng lại bằng 360° .

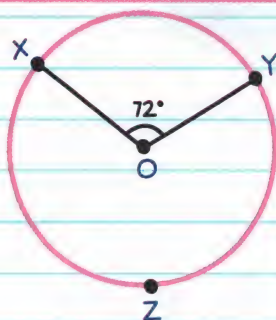
$$m\widehat{AB} + m\widehat{ADB} = 360^\circ$$



VÍ DỤ: Tìm $m\widehat{XZY}$.

Vì số đo của một cung bằng số đo của góc ở tâm của nó nên ta có:

$$m\widehat{XY} = m\angle XOY = 72^\circ$$



Cung nhỏ và cung lớn cộng lại bằng 360° nên:

$$m\widehat{XY} + m\widehat{XZY} = 360^\circ$$

$$72^\circ + m\widehat{XZY} = 360^\circ$$

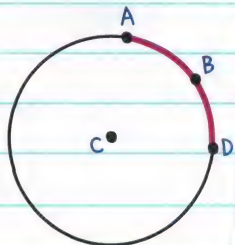
$$m\widehat{XZY} = 288^\circ$$

CUNG KÈ NHAU là hai cung sát nhau. Chúng có chung một điểm đầu.

TIỀN ĐỂ CỘNG CUNG

Tổng của hai cung kè nhau bằng cung tổng.

$$m\widehat{AD} = m\widehat{AB} + m\widehat{BD}$$



VÍ DỤ: KN là một đường kính của $\odot P$. Hãy tìm \widehat{LN} .

Vì \widehat{KLN} là cung bán nguyệt nên $m\widehat{KLN} = 180^\circ$.

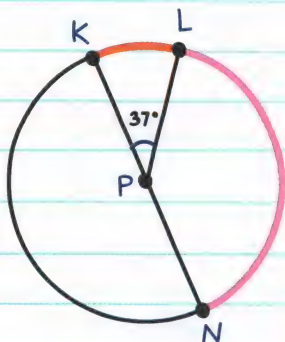
Từ tiên đề cộng cung ta có:

$$m\widehat{KL} + m\widehat{LN} = 180^\circ$$

$$m\angle KPL + m\widehat{LN} = 180^\circ$$

$$37^\circ + m\widehat{LN} = 180^\circ$$

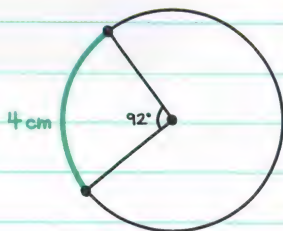
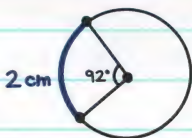
$$m\widehat{LN} = 143^\circ$$



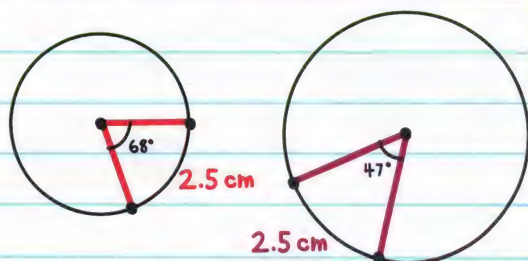
CHIỀU DÀI CUNG TRÒN

CHIỀU DÀI CUNG TRÒN là chiều dài của một cung (khoảng cách từ điểm đầu đến điểm cuối)

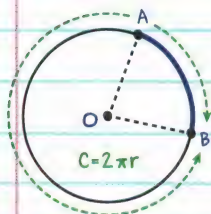
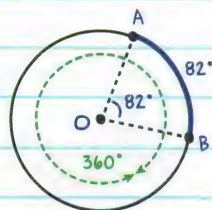
Hai cung có thể có chung số đo góc nhưng chiều dài lại khác nhau.



Hai cung có thể
có cùng độ dài
nhưng số đo góc
lại khác nhau



Số đo cung tròn bằng với số đo góc
ở tâm.

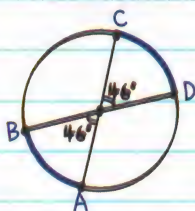


Chiều dài cung tròn là một phần của
chu vi đường tròn.

CUNG BẰNG NHAU là các cung có cùng số đo và
thuộc cùng một đường tròn hoặc thuộc các đường tròn
bằng nhau.

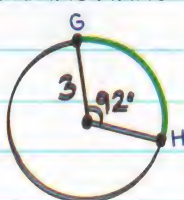
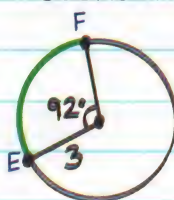
Hai đường tròn bằng nhau nếu chúng có cùng bán kính.

CUNG TRÒN BẰNG NHAU



$$\widehat{AB} \cong \widehat{CD}$$

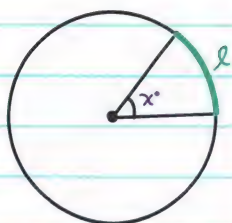
ĐƯỜNG TRÒN BẰNG NHAU



$$\widehat{EF} \cong \widehat{GH}$$

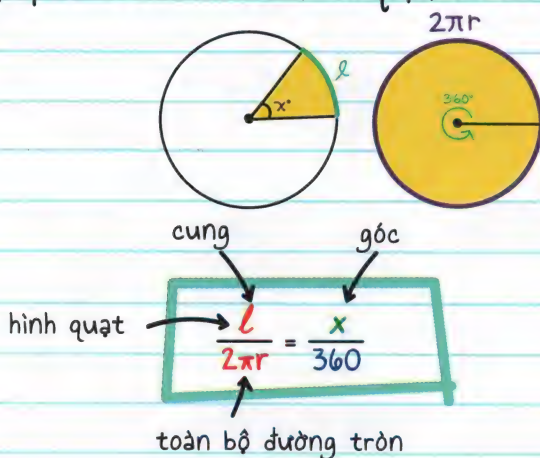
CÔNG THỨC TÍNH CHIỀU DÀI CUNG TRÒN

Để tính CHIỀU DÀI CUNG TRÒN (l) của một hình quạt có góc ở tâm bằng x° , ta sử dụng công thức sau:



$$l = \frac{x}{360} \times 2\pi r$$

Để đưa ra công thức trên, ta viết một tỷ lệ thức so sánh một phần của hình tròn (hình quạt) với toàn bộ hình tròn.

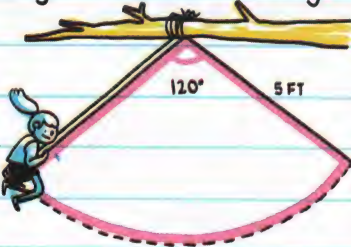


Số đo độ dài của một cung bằng với độ đo của góc ở tâm chia cho 360 rồi nhân với $2\pi r$:

$$\text{số đo độ dài cung} = \frac{\text{độ đo góc ở tâm}}{360} \times 2\pi r$$

$$l = \frac{x}{360} \times 2\pi r$$

VÍ DỤ: Alexandra chơi xích đu gắn trên một cái cây có độ dài xích đu là 5 foot.



Nếu bạn ấy đu một góc 120° , thì khoảng cách bạn ấy đã đu là bao nhiêu?

Độ dài bạn ấy đã đu là chiều dài cung của hình quạt có góc ở tâm bằng 120° .

$$l = \frac{x}{360} \times 2\pi r$$

Sử dụng công thức tính độ dài cung tròn với $x = 120$ và $r = 5$.

$$= \frac{120}{360} \times 2\pi(5)$$

Alexandra đã đu 10,5 foot.

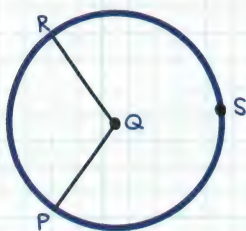
$$= \frac{10\pi}{3} \approx 10.5 \text{ ft}$$



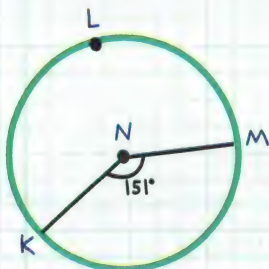


BÀI TẬP

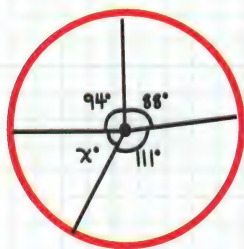
1. Gọi tên cung lớn và cung nhỏ của $\odot Q$.



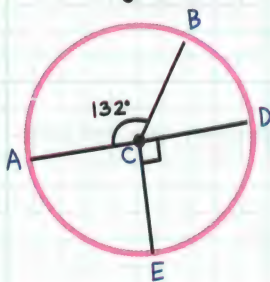
3. Hãy tìm $m\widehat{KLM}$.



2. Hãy tìm độ đo của $\angle x$.



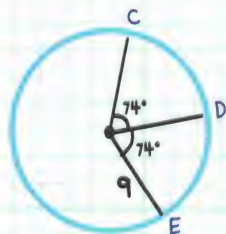
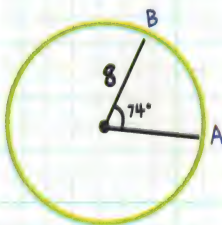
4. \overline{AD} là đường kính của $\odot C$. Hãy tìm $m\widehat{BD}$.



5. Với phần A và B, hãy cho biết mỗi mệnh đề sau đúng hay sai.

A. $\widehat{AB} \cong \widehat{CD}$

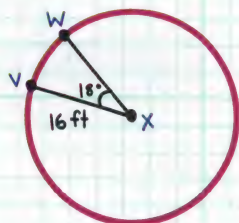
B. $\widehat{CD} \cong \widehat{DE}$



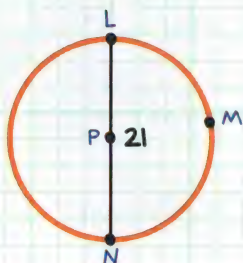


BÀI TẬP

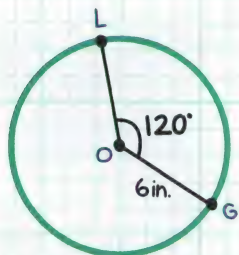
6. Hãy tìm độ dài của \widehat{VW} . Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất.



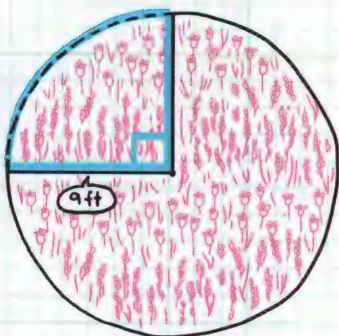
7. Hãy tìm độ dài của \widehat{LMN} .



8. Hãy tìm độ dài của \widehat{LG} .



9. Javier có một mảnh vườn hình tròn bán kính 9foot. Anh ấy đang xếp một đường viền bằng đá quanh một phần tư của đường tròn (một cung 90°). Hỏi anh ấy cần xếp bao nhiêu foot đường viền đá?



LỜI GIẢI



1. Cung lớn \widehat{PSR} (hoặc \widehat{RSP}), cung nhỏ \widehat{PR} (hoặc \widehat{RP})

2. $x = 67^\circ$

3. $m\widehat{KM} + m\widehat{KLM} = 360^\circ$

$$151^\circ + m\widehat{KLM} = 360^\circ$$

$$m\widehat{KLM} = 209^\circ$$

4. $m\widehat{BD} = 48^\circ$

5. **A.** Sai. Các cung phải có cùng độ đo VÀ ở trên cùng một đường tròn hoặc ở trên các đường tròn bằng nhau.

B. Đúng. Các cung có cùng độ đo và ở trên cùng một đường tròn.

6. Độ dài của $\widehat{VW} = \frac{18}{360} \times 2\pi(16)$

$$= \frac{8\pi}{5} \text{ ft} \approx 5.0 \text{ ft}$$

$$\begin{aligned} 7. \text{ Độ dài của } \widehat{LMN} &= \frac{180}{360} \times 2\pi(10,5) \\ &= \frac{21\pi}{2} \approx 33,0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8. \text{ Độ dài của } \widehat{LG} &= \frac{120}{360} \times 2\pi(6) \\ &= 4\pi \approx 12,6 \text{ in.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9. \text{ Độ dài của đường viền đá} &= \frac{90}{360} \times 2\pi(9) \\ &= \frac{9\pi}{2} \approx 14,1 \text{ ft} \end{aligned}$$

Chương 39

RADIAN

RADIAN

Ta có một cách khác để đo góc là sử dụng **RADIANS** (rad).

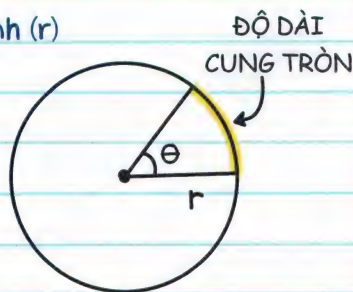
Một radian là số đo góc ở tâm có độ dài cung tròn bằng với bán kính.

ĐÓ CHỈ LÀ MỘT ĐƠN VỊ KHÁC ĐỂ ĐO GÓC. GIỐNG NHƯ ĐO ĐỘ DÀI BẰNG FOOT THAY CHO MÉT.



độ dài cung tròn = bán kính (r)

$$m\angle\theta = 1\text{radian}$$



Vì $C = 2\pi r$, ta biết rằng có 2π bán kính trong toàn bộ chu vi đường tròn.

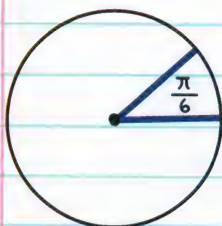
Trong toàn bộ đường tròn, ta có 2π radian.

$$2\pi \text{ radian} = 360^\circ$$

$$\pi \text{ radian} = 180^\circ$$

$$1 \text{ radian} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,3^\circ$$

Số đo radian thường dùng



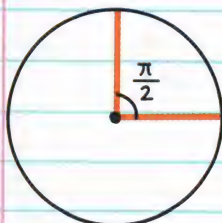
$$\frac{\pi}{6} \text{ rad} = 30^\circ$$



$$\frac{\pi}{4} \text{ rad} = 45^\circ$$



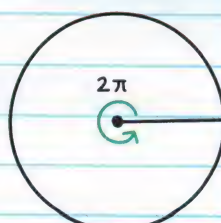
$$\frac{\pi}{3} \text{ rad} = 60^\circ$$



$$\frac{\pi}{2} \text{ rad} = 90^\circ$$



$$\pi \text{ rad} = 180^\circ$$



$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ$$

CHUYỂN ĐỔI GIỮA ĐỘ VÀ RADIAN

Để đổi từ radian sang độ, ta nhân với $\frac{180^\circ}{\pi}$.

Để đổi từ độ sang radian, ta nhân với $\frac{\pi}{180^\circ}$.

VÍ DỤ: Đổi 30° sang radian.

Nhân 30° với $\frac{\pi}{180^\circ}$.

$$30^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}$$

$$\frac{30\pi}{180^\circ} = \frac{1\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

VÍ DỤ: Đổi $\frac{3\pi}{2}$ sang độ.

Nhân $\frac{3\pi}{2}$ với $\frac{180^\circ}{\pi}$.

$$\frac{3\pi}{2} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 3 \cdot 90^\circ = 270^\circ$$



BÀI TẬP

Từ câu 1-5, hãy đổi các độ đo sau sang radian.

1. 180°

2. 330°

3. 75°

4. 45°

5. 110°

Từ câu 6-10, hãy đổi các số đo sau sang độ.

6. $\frac{5\pi}{6} \text{ rad}$

7. $\frac{\pi}{6} \text{ rad}$

8. $\frac{3\pi}{2} \text{ rad}$

9. $\frac{4\pi}{3} \text{ rad}$

10. $\frac{\pi}{12} \text{ rad}$

LỜI GIẢI



1. π

2. $\frac{11\pi}{6}$

3. $\frac{5\pi}{12}$

4. $\frac{\pi}{4}$

5. $\frac{11\pi}{18}$

6. 150°

7. 30°

8. 270°

9. 240°

10. 15°

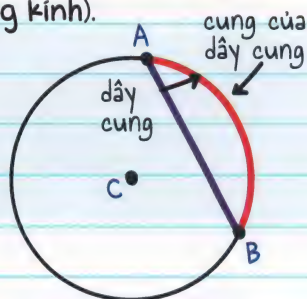
Chương 40

CUNG VÀ DÂY CUNG

DÂY CUNG chia một đường tròn thành cung lớn và cung nhỏ (trừ khi dây cung là đường kính).

Cung nhỏ được gọi là **CUNG CỦA DÂY CUNG**.

Dây cung \overline{AB} có cung \overline{AB} .



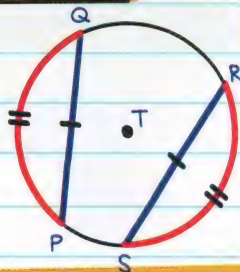
CÁC ĐỊNH LÝ VỀ DÂY CUNG

Trong một đường tròn hay trong các đường tròn bằng nhau, các dây cung bằng nhau có các cung bằng nhau.

Nếu $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$, thì $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$.

Định lý đảo cũng đúng:

Nếu $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$, thì $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$.

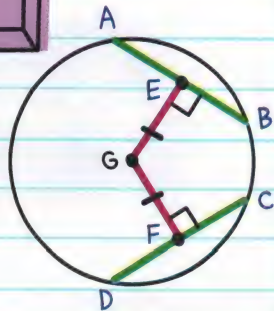


Trong một đường tròn hay trong các đường tròn bằng nhau, các dây cung bằng nhau cách đều tâm.

Nếu $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, thì $EG = FG$.

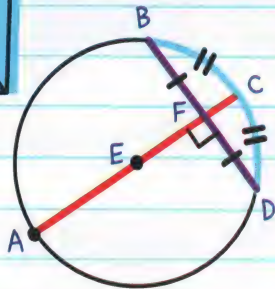
Định lý đảo cũng đúng:

Nếu $EG = FG$, thì $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.



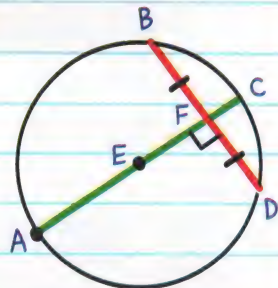
Nếu một đường kính vuông góc với một dây cung thì nó chia đôi cung và dây cung của cung đó.

Nếu $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, thì $\overline{BF} \cong \overline{FD}$
và $\overline{BC} \cong \overline{CD}$.



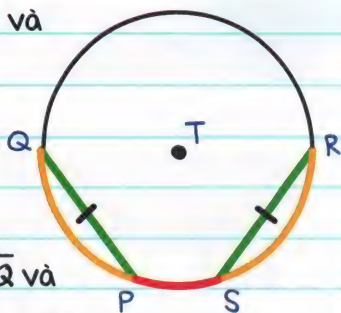
Đường trung trực của một dây cung chính là đường kính.

Nếu \overline{AC} là trung trực của \overline{BD} thì \overline{AC} là đường kính của $\odot E$.



VÍ DỤ: Trong $\odot T$, $m\widehat{QR} = 177^\circ$ và $m\widehat{SP} = 33^\circ$.

Tìm $m\widehat{PQ}$ và $m\widehat{RS}$.



Vì các dây cung bằng nhau (\overline{PQ} và \overline{RS}) có các cung tròn bằng nhau nên:

$$\widehat{RS} \cong \widehat{PQ} \text{ và } m\widehat{RS} = m\widehat{PQ}$$

Các cung trong một đường tròn cộng lại bằng 360° nên ta có:

$$m\widehat{PQ} + m\widehat{QR} + m\widehat{RS} + m\widehat{SP} = 360^\circ$$

$$m\widehat{PQ} + 177^\circ + m\widehat{PQ} + 33^\circ = 360^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{Vì } m\widehat{RS} &= m\widehat{PQ} \text{ và} \\ m\widehat{SP} &= 33^\circ \end{aligned}$$

$$m\widehat{PQ} + m\widehat{PQ} = 360^\circ - 177^\circ - 33^\circ$$

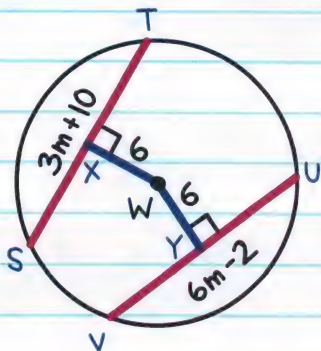
$$2 \times m\widehat{PQ} = 150^\circ$$

$$m\widehat{PQ} = 75^\circ$$

$$m\widehat{RS} = m\widehat{PQ} = 75^\circ$$

VÍ DỤ: Tìm chiều dài của \overline{ST} và \overline{UV} trong $\odot W$.

Vì \overline{ST} và \overline{UV} cách đều W nên chúng bằng nhau và có cùng độ đo:



$$ST = UV$$

$$3m + 10 = 6m - 2$$

$$12 = 3m$$

$$m = 4$$

Như vậy, $ST = 3m + 10 = 3(4) + 10 = 22$

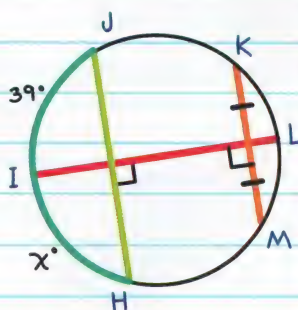
$$UV = 6m - 2 = 6(4) - 2 = 22$$

Vì $ST = UV$ nên ta biết các tính toán đã đúng.



VÍ DỤ: Tìm giá trị của x .

Ta đã biết \overline{IL} là đường kính của đường tròn nên nó là trung trực của \overline{KM} .



Vì đường kính \overline{IL} vuông góc với \overline{JH} nên nó chia đôi \widehat{HJ} :

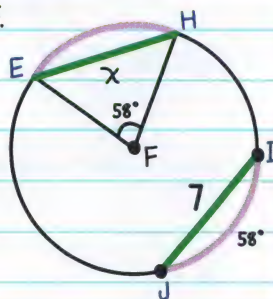
$$\widehat{IH} \cong \widehat{IJ}$$

$$m\widehat{IH} = m\widehat{IJ}$$

$$x = 39^\circ$$

VÍ DỤ: Tìm giá trị của x trong $\odot F$.

Vì ta đã biết $m\widehat{EH} = m\angle EFH$ nên $m\widehat{EH} = 58^\circ$, nghĩa là \widehat{EH} và \widehat{IJ} bằng nhau.



Vì các cung bằng nhau có các dây cung bằng nhau nên ta có:

$$\overline{EH} \cong \overline{IJ}$$

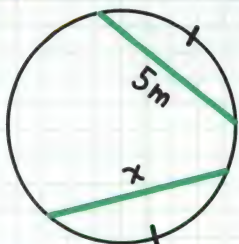
$$EH = IJ$$

$$x = 7$$

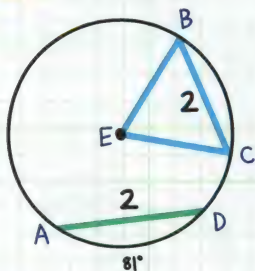


BÀI TẬP

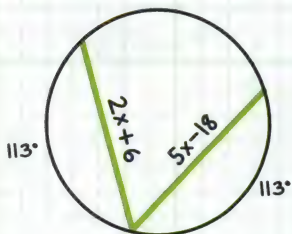
1. Tìm giá trị của x .



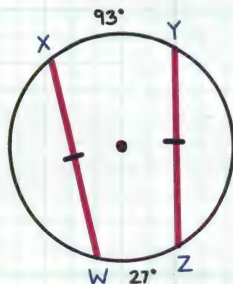
2. Tìm $m\angle BEC$.



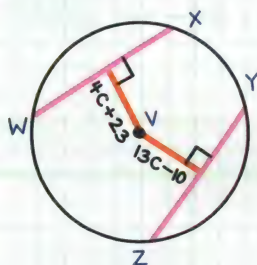
3. Tìm giá trị của x .



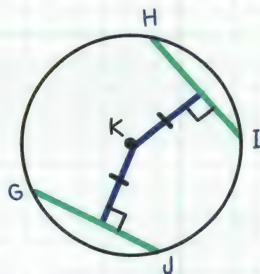
4. Tìm $m\widehat{WX}$ và $m\widehat{YZ}$.



5. Tìm c biết $\overline{WX} \cong \overline{YZ}$.

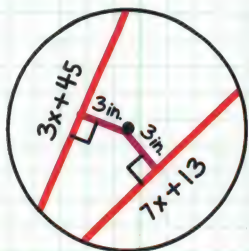


6. Chiều dài của \overline{GJ} là 7.
Tìm chiều dài của \overline{HI} .

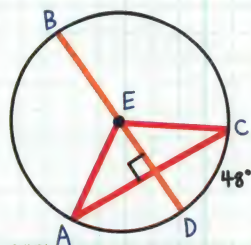


BÀI TẬP

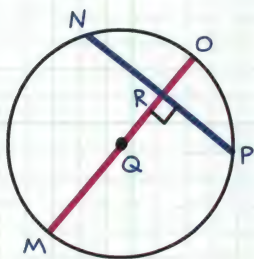
7. Tìm giá trị của x .



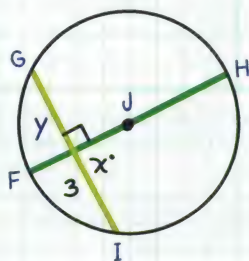
9. Tìm $m\angle AEC$.



8. Tìm độ dài của \overline{NR} và \overline{RP} biết $NP = 31$.



10. Tìm giá trị của x và y sao cho \overline{FH} là đường kính của $\odot J$.



LỜI GIẢI



1. $x = 5\text{m}$

2. $m\angle BEC = 81^\circ$

3. $2x + 6 = 5x - 18$; do đó $x = 8$

4. $m\widehat{WX} = 120^\circ$, $m\widehat{YZ} = 120^\circ$

5. $4c + 23 = 13c - 10$; do đó $c = \frac{11}{3}$

6. $\overline{HI} = 7$

7. $3x + 45 = 7x + 13$; do đó $x = 8$

8. $\overline{NR} = \frac{31}{2}$, $\overline{RP} = \frac{31}{2}$

9. $m\angle AEC = 96^\circ$

10. $x = 90^\circ$, $y = 3$

Chương 41

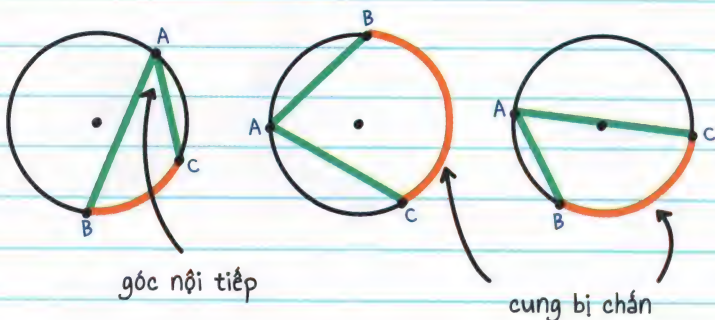
GÓC NỘI TIẾP

GÓC NỘI TIẾP được tạo thành bởi hai dây cung cắt nhau có đỉnh nằm trên đường tròn.

CUNG BỊ CHẮN là phần đường tròn nằm ở trong góc nội tiếp

Số đo của một góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.

$$m\angle A = \frac{1}{2} m\widehat{BC}$$



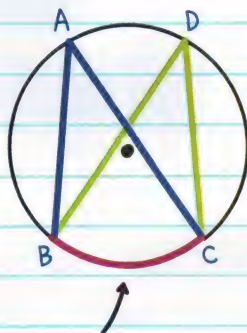
Nếu hai góc nội tiếp có cùng cung bị chắn thì chúng bằng nhau.

$$m\angle A = \frac{1}{2} m\angle \widehat{BC}$$

$$m\angle D = \frac{1}{2} m\angle \widehat{BC}$$

$$m\angle A = m\angle D$$

$$\angle A \cong \angle D$$



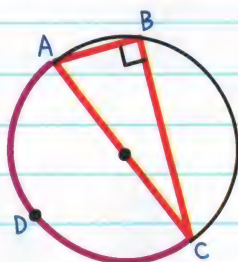
cùng cung bị chắn

Một góc nội tiếp chắn một nửa đường tròn là một góc vuông.

$$m\angle B = \frac{1}{2} m\widehat{ADC}$$

$$= \frac{1}{2} (180^\circ)$$

$$= 90^\circ$$

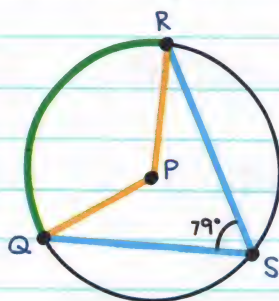


VÍ DỤ: Tìm $m\angle QPR$ biết P là tâm của đường tròn.

$$m\angle S = \frac{1}{2} m\widehat{QR}$$

$$79^\circ = \frac{1}{2} m\widehat{QR}$$

$$m\widehat{QR} = 158^\circ$$



Vì số đo của cung \widehat{QR} bằng với số đo của góc ở tâm $\angle QPR$ nên ta có:

$$m\angle QPR = 158^\circ$$

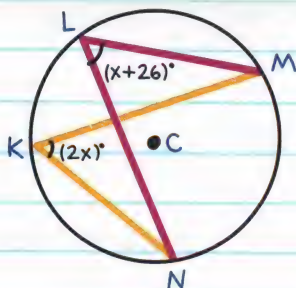
VÍ DỤ: Tìm giá trị của x , $m\angle NKM$, và $m\angle NLM$.

Vì $\angle K$ và $\angle L$ là các góc nội tiếp cùng chắn cung \widehat{NM} nên:

$$\angle K \cong \angle L$$

$$m\angle K = m\angle L$$

$$2x = x + 26$$



$$x = 26^\circ$$

$$m\angle K = (2x)^\circ = (2 \times 26)^\circ = 52^\circ$$

$$m\angle L = (x + 26)^\circ = (26 + 26)^\circ = 52^\circ$$

Vì $m\angle K = m\angle L$
nên ta biết các tính
toán đã đúng

HÌNH NỘI TIẾP là một hình nằm phía trong một hình khác, chỉ tiếp xúc ở các cạnh.

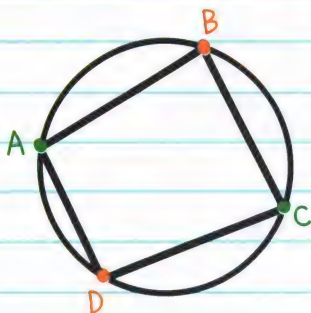
Tam giác trong hình vẽ nội tiếp trong hình tròn.



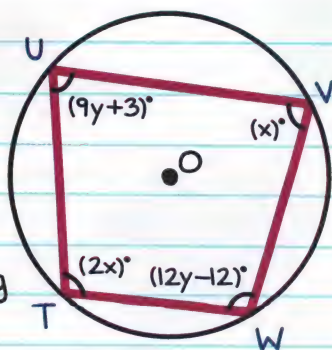
Nếu một tứ giác nội tiếp trong một đường tròn thì các góc đối của nó bù nhau.

$\angle A$ và $\angle C$ bù nhau.

$\angle B$ và $\angle D$ bù nhau.



VÍ DỤ: Một chiếc vòng cổ tuyệt đẹp có hình tứ giác nội tiếp trong một đường tròn. Hãy tìm $m\angle U$ và $m\angle V$.



Vì tứ giác nội tiếp trong đường tròn nên ta biết các góc đối của nó bù nhau:

$$m\angle U + m\angle W = 180^\circ$$

$$(9y + 3) + (12y - 12) = 180$$

$$21y - 9 = 180$$

$$21y = 189$$

$$y = 9$$

$$m\angle U = (9y + 3)^\circ = (9 \times 9 + 3)^\circ = 84^\circ$$

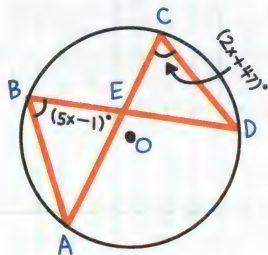
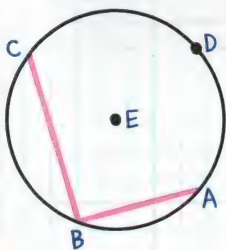
Vì $84^\circ + 96^\circ = 180^\circ$
nên ta biết các tính
toán đã đúng

$$m\angle W = (12y - 12)^\circ = (12 \times 9 - 12)^\circ = 96^\circ$$

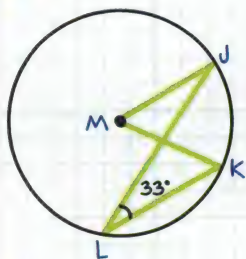


BÀI TẬP

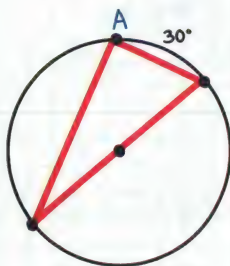
1. Biết $m\angle ABC = 105^\circ$. Hãy tìm $m\widehat{CDA}$.
4. Tìm giá trị của x , $m\angle B$, và $m\angle C$.



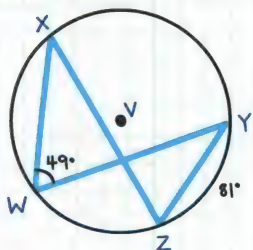
2. Tìm $m\angle JMK$.



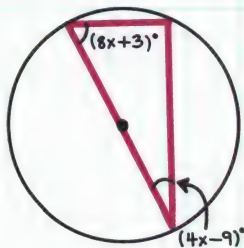
5. Tìm $m\angle A$.



3. Tìm $m\angle Z$.

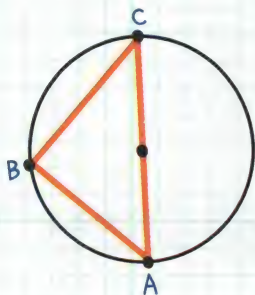


6. Tìm giá trị của x .

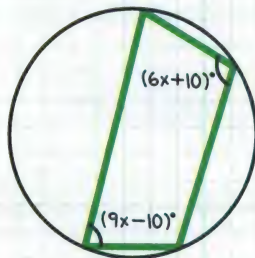


BÀI TẬP

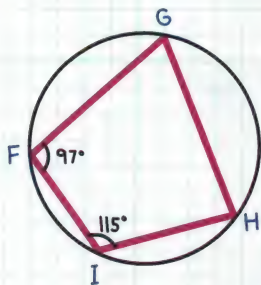
7. Tìm $m\angle A$, $m\angle B$,
và $m\angle C$.



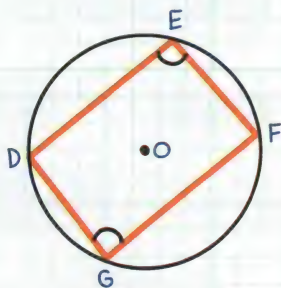
9. Tìm giá trị của x .



8. Tìm $m\angle G$ và $m\angle H$.



10. Tìm $m\angle E$ và $m\angle G$.



LỜI GIẢI



1. $m\widehat{CDA} = 210^\circ$

2. $m\angle JMK = 66^\circ$

3. $m\angle 2 = 49^\circ$

4. $5x - 1 = 2x + 47$; do đó $x = 16$, $m\angle B = 79^\circ$, $m\angle C = 79^\circ$

5. $m\angle A = 90^\circ$

6. $(8x + 3) + (4x - 9) = 90$; do đó $x = 8$

7. $m\angle A = 45^\circ$, $m\angle B = 90^\circ$, $m\angle C = 45^\circ$

8. $m\angle G = 65^\circ$, $m\angle H = 83^\circ$

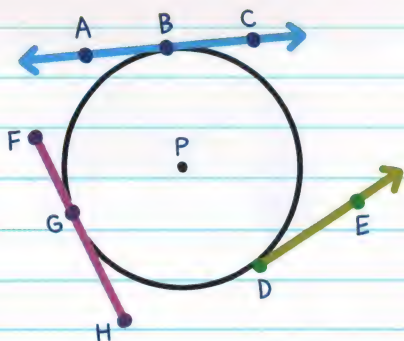
9. $(9x - 10) + (6x + 10) = 180$; do đó $x = 12$

10. $m\angle E = 90^\circ$, $m\angle G = 90^\circ$

Chương 42

TIẾP TUYẾN

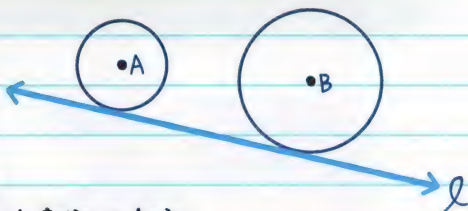
TIẾP TUYẾN là một đường thẳng, đoạn thẳng hoặc tia cắt đường tròn tại đúng một điểm (gọi là **TIẾP ĐIỂM**).



\overleftrightarrow{AC} , \overleftrightarrow{DE} , và \overleftrightarrow{FH} là tiếp tuyến với $\odot P$.

B, D, và G là các tiếp điểm.

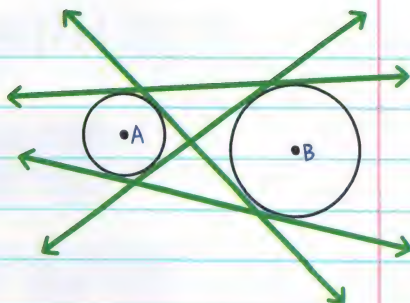
Hai đường tròn có **TIẾP TUYẾN CHUNG** nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của cả hai đường tròn.



Đường thẳng l là tiếp tuyến chung của $\odot A$ và $\odot B$.

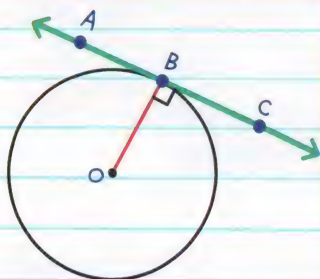
Các đường tròn có thể có nhiều tiếp tuyến chung.

$\odot A$ và $\odot B$ có bốn tiếp tuyến chung.



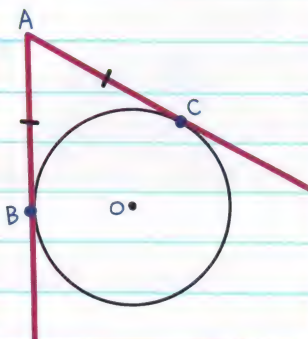
Một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn khi và chỉ khi nó vuông góc với bán kính tại tiếp điểm.

\overleftrightarrow{AC} là tiếp tuyến của $\odot O$ khi và chỉ khi $\overline{OB} \perp \overleftrightarrow{AC}$.



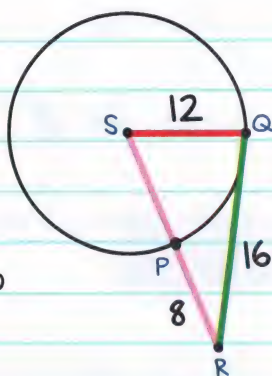
Các đoạn thẳng tiếp tuyến xuất phát từ cùng một điểm ngoài đường tròn thì bằng nhau.

Nếu \overline{AB} và \overline{AC} là các tiếp tuyến của $\odot O$ tại các điểm B và C thì $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.



VÍ DỤ: Hãy cho biết \overline{QR} có phải là tiếp tuyến của $\odot S$ không.

Nếu $\overline{SQ} \perp \overline{QR}$ thì \overline{QR} là một tiếp tuyến. Ta có thể sử dụng định lý Pytago để kiểm tra xem $\triangle SQR$ có phải là tam giác vuông không.



1. Tìm chiều dài của \overline{SR} :

$SP = 12$ vì nó là bán kính của đường tròn.

$$SR = SP + PR$$

$$SR = 12 + 8 = 20$$

Tất cả các bán kính của một đường tròn đều bằng nhau.

$$SQ = 12, \text{ so } SP = 12$$

2. Kiểm tra xem $\triangle SQR$ có phải là tam giác vuông không.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$SQ^2 + QR^2 = SR^2$$

$$12^2 + 16^2 = 20^2$$

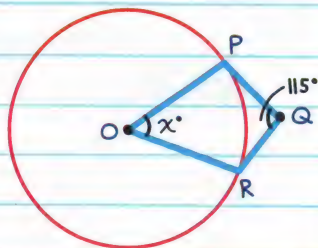
$$144 + 256 = 400$$

$$400 = 400 \quad \checkmark$$

Vì $SQ^2 + QR^2 = SR^2$ nên $\triangle SQR$ là tam giác vuông và $\overline{SQ} \perp \overline{QR}$.

Do đó, \overline{QR} là tiếp tuyến của $\odot S$.

VÍ DỤ: Tìm giá trị của x biết \overline{PQ} và \overline{QR} là tiếp tuyến của đường tròn O và $m\angle Q = 115^\circ$.



Vì \overline{PQ} và \overline{QR} là tiếp tuyến của đường tròn O nên $\overline{OP} \perp \overline{PQ}$ và $\overline{OR} \perp \overline{RQ}$.

Do đó, $m\angle P = 90^\circ$ và $m\angle R = 90^\circ$.

Vì tổng số đo các góc của tứ giác bằng 360° ,

$$m\angle O + m\angle P + m\angle Q + m\angle R = 360^\circ$$

$$x + 90 + 115 + 90 = 360$$

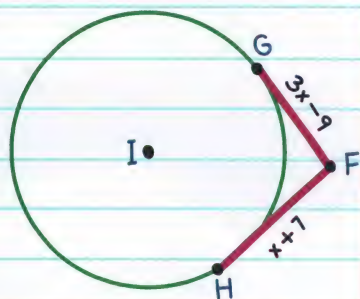
$$x + 295 = 360$$

$$x = 65$$

VÍ DỤ: \overline{FG} và \overline{FH} là tiếp tuyến của $\odot I$.

Tìm giá trị của x .

Vì \overline{FG} và \overline{FH} là tiếp tuyến của $\odot I$ nên chúng bằng nhau.

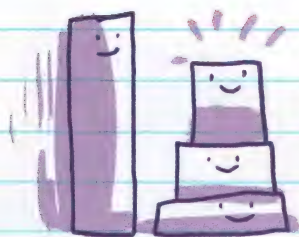


$$FG = FH$$

$$3x - 9 = x + 7$$

$$2x = 16$$

$$x = 8$$

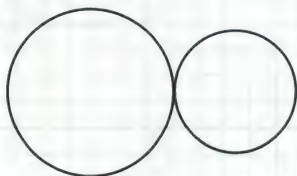




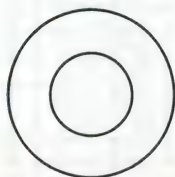
BÀI TẬP

Với câu 1 và 2, hãy cho biết cặp đường tròn nào có tiếp tuyến chung. Nếu có, hãy chỉ rõ chúng có bao nhiêu tiếp tuyến chung.

1.

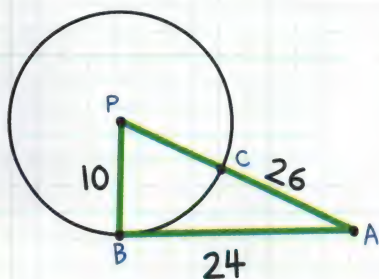
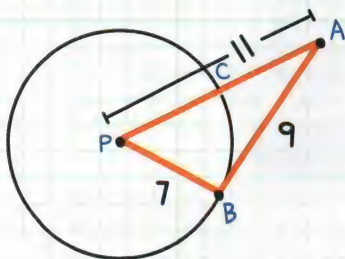


2.



Với câu 3 và 4, hãy cho biết \overline{AB} có phải là tiếp tuyến của $\odot P$ không.

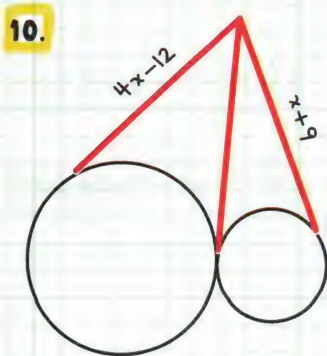
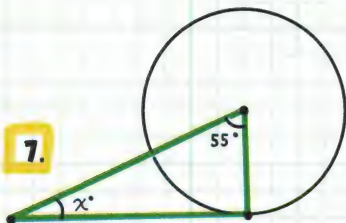
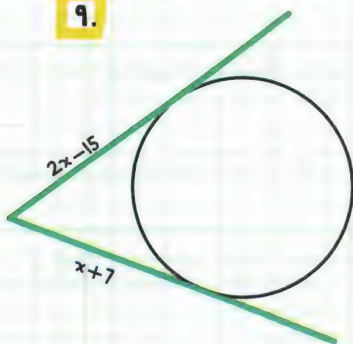
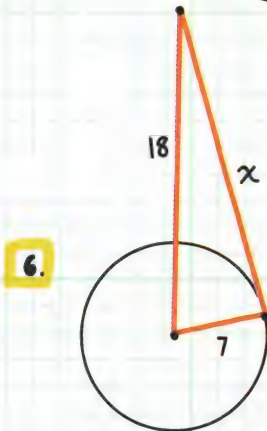
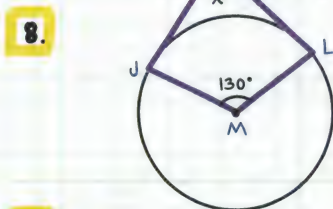
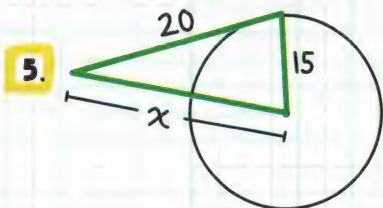
3.





BÀI TẬP

Từ câu 5-10, hãy tìm giá trị của x . Giả sử các đoạn thẳng có tiếp xúc với đường tròn đều là tiếp tuyến.



LỜI GIẢI



1. Có, 3

2. Không

3. Không, $7^2 + 9^2 \neq 11^2$

4. Có, $10^2 + 24^2 = 26^2$

5. $20^2 + 15^2 = x^2$; do đó $x = 25$

6. $x^2 + 7^2 = 18^2$; do đó $x = 16,6$ xấp xỉ

7. $x + 55 + 90 = 180$; do đó $x = 35$

8. $x + 90 + 130 + 90 = 360$; do đó $x = 50$

9. $2x - 15 = x + 7$; do đó $x = 22$

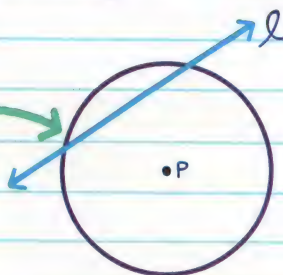
10. $4x - 12 = x + 9$; do đó $x = 7$

Chương 43

CÁT TUYẾN

CÁT TUYẾN là đường thẳng cắt đường tròn tại hai điểm.

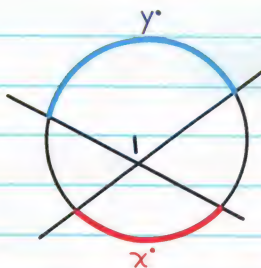
Đường thẳng ℓ là cát tuyến của $\odot P$.



Khi hai cát tuyến cắt nhau
phía trong đường tròn:

Độ đo góc tạo thành bằng nửa
tổng số đo hai cung bị chắn.

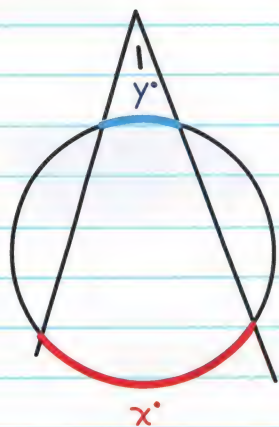
$$l = \frac{1}{2}(x^\circ + y^\circ)$$



Khi hai cát tuyến cắt nhau
phía ngoài đường tròn:

Độ đo góc tạo thành bằng nửa
hiệu số đo cung bị chắn ở xa trừ
đi cung bị chắn ở gần.

$$\frac{1}{2}(x^\circ - y^\circ)$$



Cũng đúng với:

Một cát tuyến hoặc
một tiếp tuyến



Hai tiếp tuyến



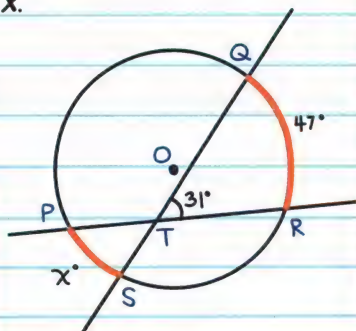
VÍ DỤ: Hãy tìm giá trị của x .

$$m\angle QTR = \frac{1}{2}(m\widehat{PS} + m\widehat{QR})$$

$$31 = \frac{1}{2}(x + 47)$$

$$62 = x + 47$$

giao điểm
nằm trong
đường
tròn



$$x = 15^\circ$$

VÍ DỤ: Hãy tìm $m\angle A$.

Trước tiên ta tìm $m\widehat{BCD}$:

$$m\widehat{BCD} + m\widehat{BD} = 360^\circ$$

(theo tiên đề cộng cung tròn)

$$m\widehat{BCD} + 135^\circ = 360^\circ$$

$$m\widehat{BCD} = 225^\circ$$

Sau đó ta tìm $m\angle A$:

$$m\angle A = \frac{1}{2}(m\widehat{BCD} - m\widehat{BD})$$

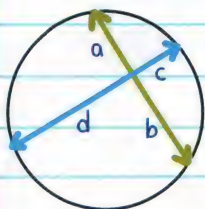
$$= \frac{1}{2}(225^\circ - 135^\circ)$$

$$= \frac{1}{2}(90^\circ) = 45^\circ$$

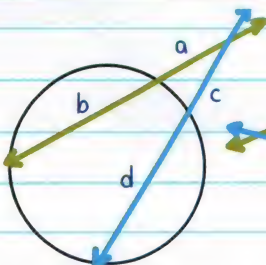
giao điểm nằm
ngoài đường tròn



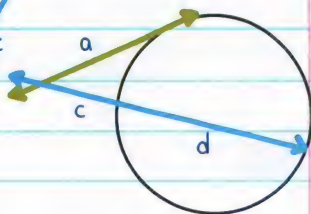
Khi các cát tuyến và các tiếp tuyến cắt nhau, độ dài các đoạn thẳng chúng tạo ra có những tính chất đặc biệt.



cát tuyến cắt
phía trong
đường tròn



cát tuyến
cắt phía ngoài
đường tròn



tiếp tuyến
và cát tuyến
cắt nhau

$$a \times b = c \times d \quad a \times (a + b) = c \times (c + d) \quad a^2 = c \times (c + d)$$

VÍ DỤ: Hãy tìm giá trị của x .

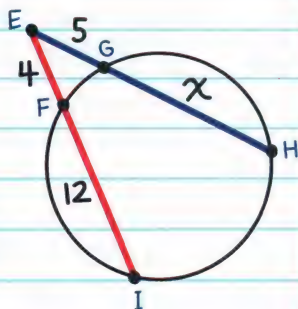
Sử dụng $a \times (a + b) = c \times (c + d)$

$$5(5 + x) = 4(4 + 12)$$

$$25 + 5x = 16 + 48$$

$$5x = 39$$

$$x = \frac{39}{5}$$

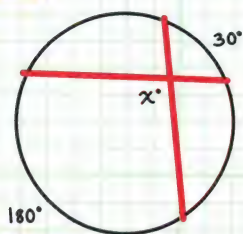




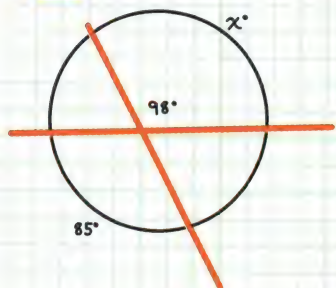
BÀI TẬP

Với câu 1-6, hãy tìm giá trị của x . Giả sử các đoạn thẳng có tiếp xúc với đường tròn đều là tiếp tuyến.

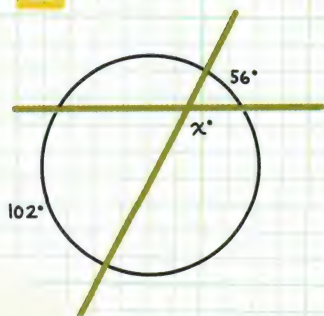
1.



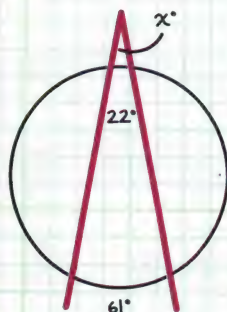
2.



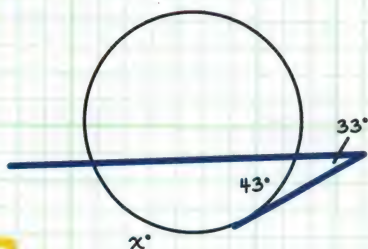
3.



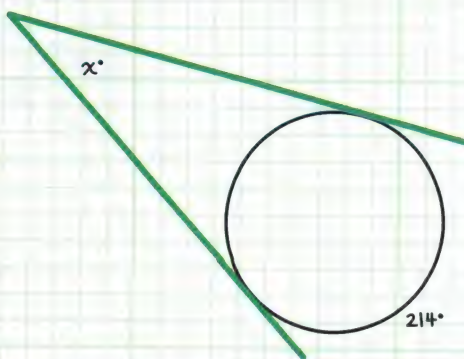
4.



5.



6.



LỜI GIẢI



1. $x = \frac{1}{2}(30 + 180)$; do đó $x = 105^\circ$

2. $98 = \frac{1}{2}(x + 85)$; do đó $x = 111^\circ$

3. $180 - x = \frac{1}{2}(56 + 102)$; do đó $x = 101^\circ$

4. $x = \frac{1}{2}(61 - 22)$; do đó $x = \frac{39}{2} = 19,5^\circ$

5. $33 = \frac{1}{2}(x - 43)$; do đó $x = 109^\circ$

6. $x = \frac{1}{2}(214 - 146)$; do đó $x = 34^\circ$

Chương 44

CÔNG THỨC TÍNH ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN, CUNG TRÒN

Ta có thể vẽ một đường tròn trên mặt phẳng tọa độ nếu biết tọa độ của tâm và bán kính.

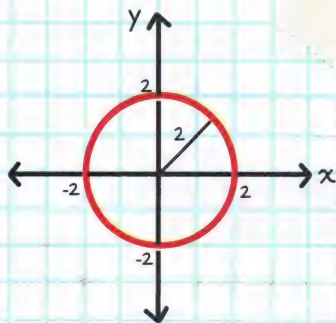
VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN TÂM $(0, 0)$

Phương trình đường tròn có tâm ở gốc tọa độ và bán kính r là:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Tâm: $(0, 0)$

Bán kính: 2



Phương trình: $x^2 + y^2 = 4$ ← 2^2

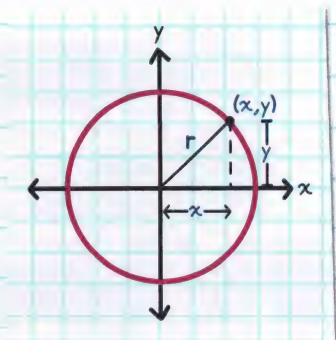
Ta có thể suy ra phương trình này bằng định lý Pytago.

Với điểm (x, y) bất kỳ
trên đường tròn,

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ (định lý Pytago)}$$

Đường tròn là hình tạo bởi
tất cả các điểm (x, y) thỏa mãn

$$x^2 + y^2 = r^2.$$



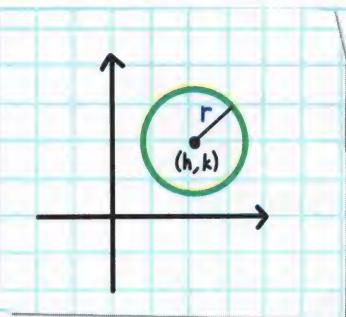
VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN TÂM (h, k)

Nếu tâm của đường tròn không phải ở gốc tọa độ, ta sử dụng phương trình dạng chuẩn tắc:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Định lý Pytago

Tâm là (h, k) và
bán kính là r .



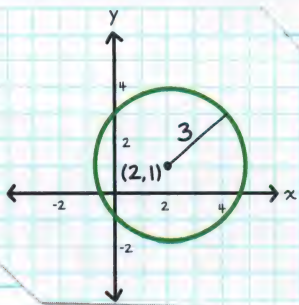
VÍ DỤ: Tìm phương trình của đường tròn đã cho.

Tâm: $(2, 1)$

Bán kính: 3

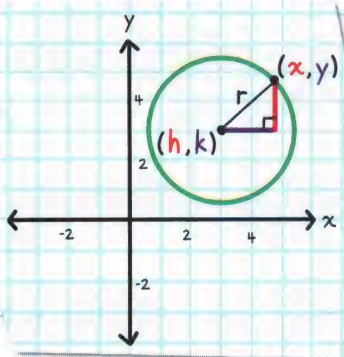
Phương trình:

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9 \quad \leftarrow 3^2$$



Ta có thể suy ra phương trình đường tròn có tâm (h, k) và bán kính r bằng định lý Pytago:

Vẽ một tam giác vuông có bán kính của đường tròn là cạnh huyền.

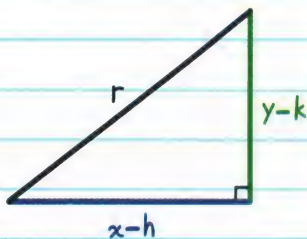


Chiều dài của cạnh nằm ngang trong tam giác là: $x - h$.

Chiều dài của cạnh thẳng đứng trong tam giác là: $y - k$.

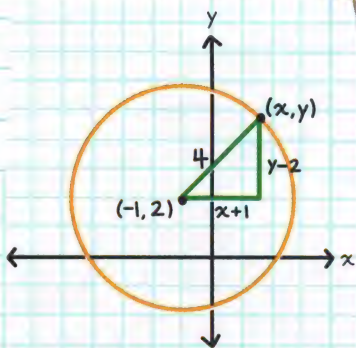
Sử dụng định lý Pytago,

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$



VÍ DỤ: Tìm phương trình đường tròn có tâm $(-1, 2)$ và bán kính 4.

Vẽ một tam giác vuông có bán kính của đường tròn là cạnh huyền. Đánh dấu các điểm đầu bán kính (x, y) .



Chiều dài của cạnh nằm ngang trong tam giác là:

$$x - (-1) = x + 1$$

Chiều dài của cạnh thẳng đứng trong tam giác là: $y - 2$.

Sử dụng định lý Pytago.

$$(x - (-1))^2 + (y - 2)^2 = 4^2$$

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$$

Rút gọn.

Để vẽ đường tròn trên:

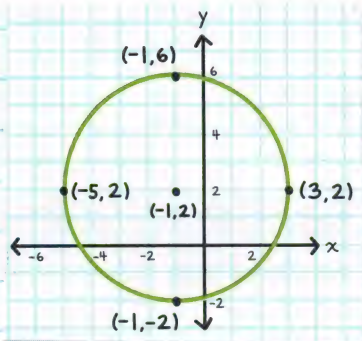
Bước 1: Vẽ tâm $(-1, 2)$.

Bước 2: Vẽ bốn điểm sử dụng bán kính.

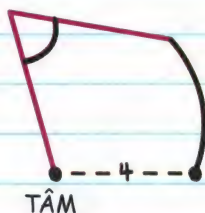
Bán kính bằng 4 nên ta đếm 4 đơn vị từ tâm lên phía trên.
Chấm điểm $(-1, 6)$.

Lại đếm 4 đơn vị từ tâm
xuống dưới $(-1, -2)$,
sang phải $(3, 2)$ và
sang trái $(-5, 2)$.

Bước 3: Sử dụng com-pa để nối các điểm.



Ta cũng có thể chấm điểm tâm và
chấm thêm một điểm cách tâm 4
đơn vị. Sau đó ta dùng com-pa để
vẽ toàn bộ đường tròn.



CHUYỂN ĐỔI VỀ DẠNG CHUẨN TẮC

Không phải lúc nào phương trình đường tròn cũng ở
dạng chuẩn tắc.

Ta sử dụng phương pháp **PHẦN BÙ BÌNH PHƯƠNG** để
viết lại phương trình dưới dạng chuẩn tắc. Khi đó ta có
thể dễ dàng tìm tâm và bán kính.

Phần bù bình phương là một phép toán đại số trong đó phương trình bậc hai được viết lại thành tổng hoặc hiệu của một số chính phương và một hằng số.

Tìm phần bù bình phương cho $x^2 + 6x + 4 = 0$

$$x^2 + 6x + 4 = 0$$

Bước 1: Cộng/trừ sao cho các hạng tử chứa x ở bên trái còn các hằng số (các số không chứa x) nằm bên phải.

$$x^2 + 6x = -4$$

Bước 2: Chia số phía trước x (hệ số của x) cho 2 và lấy bình phương kết quả. Cộng bình phương vừa lấy vào cả hai vế.

$$x^2 + 6x + \boxed{9} = -4 + \boxed{9}$$

$\uparrow \qquad \qquad \uparrow$
 $\left(\frac{6}{2}\right)^2 \qquad \left(\frac{6}{2}\right)^2$

Bước 3: Rút gọn và viết dưới dạng bình phương (phân tích thành nhân tử)

$$(x + 3)^2 = 5$$

\uparrow
 $\frac{6}{2}$

VÍ DỤ:

Viết phương trình sau dưới dạng chuẩn tắc.

$$x^2 + y^2 - 8x + 4y - 16 = 0$$

Vì phương trình này chứa cả x và y nên ta phải tìm phần bù bình phương cho mỗi biến.

Bước 1: Đưa hằng số về vế phải.

$$x^2 + y^2 - 8x + 4y = 16$$

Nhóm các số hạng chứa x với nhau và các số hạng chứa y với nhau.

$$x^2 - 8x + y^2 + 4y = 16$$

Bước 2: Chia số nằm trước x cho 2 và lấy bình phương kết quả. Cộng kết quả vào cả hai vế.

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 4y = 16 + 16$$

$$\uparrow$$
$$\left(\frac{-8}{2}\right)^2$$



Chia số nằm trước y cho 2 và lấy bình phương kết quả.
Cộng kết quả vào cả hai vế.

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 4y + \boxed{4} = 16 + 16 + \boxed{4}$$

\uparrow
 $\left(\frac{4}{2}\right)^2$

Bước 3: Rút gọn và viết dưới dạng bình phương.

$$(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 36$$

$\uparrow \qquad \uparrow$
 $\frac{-8}{2} \qquad \frac{4}{2}$

Tâm là $(4, -2)$.

Bán kính là 6.



BÀI TẬP

Với câu 1 và 2, hãy tìm tâm và bán kính của đường tròn đã cho. Sau đó vẽ hình.

1. $x^2 + (y - 3)^2 = 9$

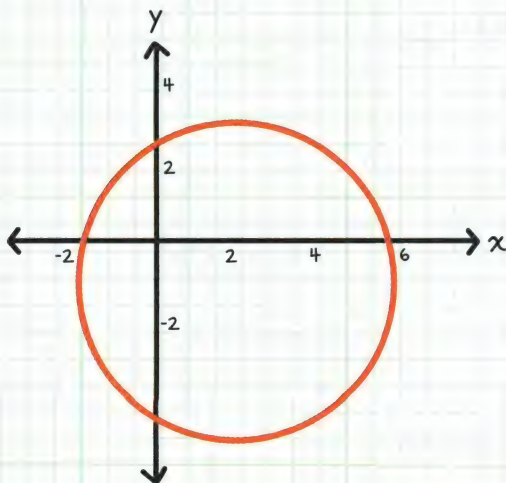
2. $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 1$

Với câu 3-5, hãy viết phương trình đường tròn với các thông tin hoặc hình vẽ đã cho.

3. Tâm ở gốc tọa độ, bán kính 9

4. Tâm $(-5, 8)$, bán kính 6

5.





BÀI TẬP

Với câu 6 và 7, hãy tìm phần bù bình phương trong phương trình.

6. $x^2 + 8x + 5 = 0$

7. $x^2 - 14x - 8 = 3$

Với câu 8 và 9, hãy viết phương trình đường tròn dưới dạng chuẩn tắc. Sau đó tìm tâm và bán kính rồi vẽ hình.

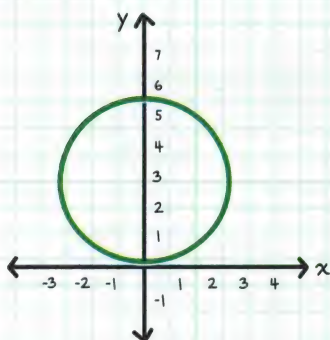
8. $x^2 - 2x + y^2 + 2y - 14 = 0$

9. $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$

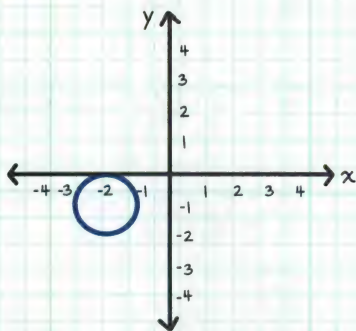
LỜI GIẢI



1. Tâm $(0, 3)$, bán kính 3



2. Tâm $(-2, -1)$, bán kính 1



3. $x^2 + y^2 = 81$

4. $(x + 5)^2 + (y - 8)^2 = 36$

5. $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$

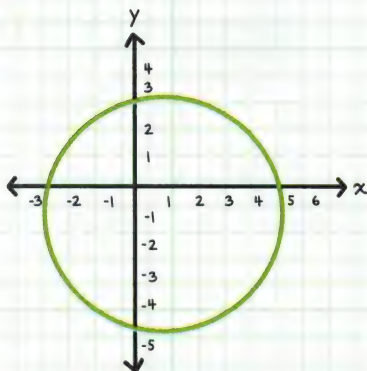
LỜI GIẢI



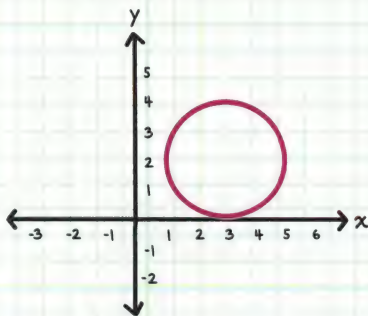
6. $(x + 4)^2 = 11$

7. $(x - 7)^2 = 60$

8. $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 16$, tâm $(1, -1)$, bán kính 4

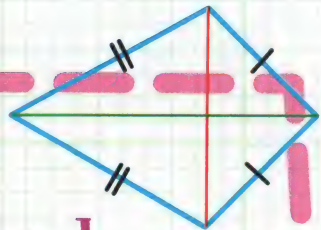
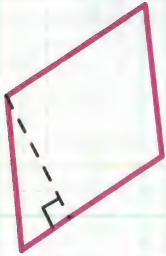


9. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$,
tâm $(3, 2)$, bán kính 2



BÀI

9



Diện tích

Chương 45

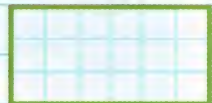
DIỆN TÍCH HÌNH BÌNH HÀNH VÀ TAM GIÁC

DIỆN TÍCH HÌNH BÌNH HÀNH

DIỆN TÍCH (A) là khoảng không phía trong một hình hai chiều. Diện tích được đo bằng đơn vị là "bình phương đơn vị độ dài" hay đơn vị độ dài².

DIỆN TÍCH CỦA MỘT HÌNH là số các ô vuông có kích thước bằng nhau chứa trong hình đó.

6 ft



3 ft

Một diện tích 18 foot vuông nghĩa là 18 ô vuông, mỗi ô có diện tích bằng 1 foot² vừa khít bên trong.

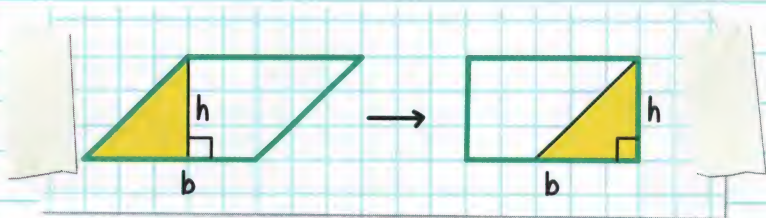
Diện tích của một hình bình hành là chiều dài đáy nhân với chiều cao. (Công thức này cũng áp dụng cho hình chữ nhật, hình thoi và hình vuông.)

$$A = \text{đáy} \times \text{chiều cao}$$

hoặc

$$A = bh$$

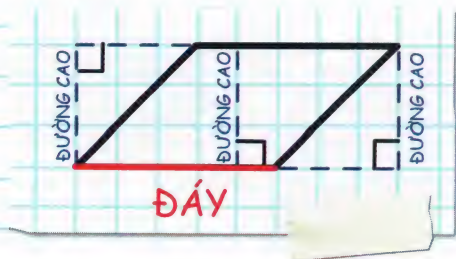
Công thức để tính diện tích hình bình hành giống với công thức tính diện tích hình chữ nhật vì hai hình tạo thành từ những phần giống nhau. Nếu ta chuyển tam giác được tô màu trong hình bình hành sang bên phải thì hình bình hành trở thành hình chữ nhật.



Đáy của hình bình hành chính là chiều dài của hình chữ nhật, còn chiều cao của hình bình hành chính là chiều rộng của hình chữ nhật. Diện tích của hình chữ nhật là:

$$A = lw = bh$$

Ta tìm đường cao của hình bình hành bằng cách vẽ một đường vuông góc từ đường thẳng chứa cạnh đáy đến đường thẳng chứa cạnh đối diện. Đường cao có thể nằm trong hoặc nằm ngoài hình bình hành.



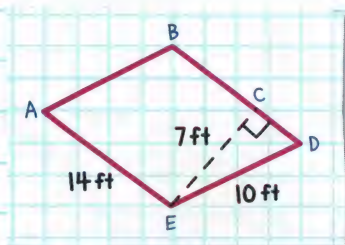
VÍ DỤ: Tìm diện tích của hình bình hành.

Vì hình vẽ có đường vuông góc từ \overline{AE} đến \overline{BD} ,
nên ta coi \overline{AE} là đáy và \overline{EC} là đường cao.

$$A = bh$$

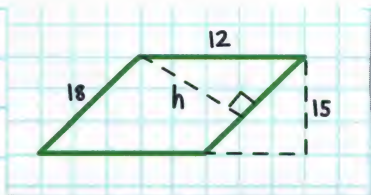
$$= 14 \times 7 = 98$$

$$A = 98 \text{ ft}^2$$



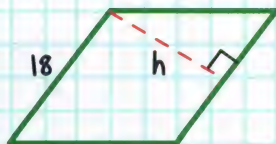
VÍ DỤ: Tìm giá trị của h trong hình bình hành.

Diện tích của hình bình hành này có thể được biểu diễn như sau:



Coi đáy = 12 và chiều cao = 15 HOẶC

Coi đáy = 18 và chiều cao = h



Vì diện tích của hình không đổi dù ta tính theo cách nào, nên ta có:

Diện tích = Diện tích

$$bh = bh$$

$$12 \times 15 = 18h$$

$$h = 10$$

DIỆN TÍCH CỦA TAM GIÁC

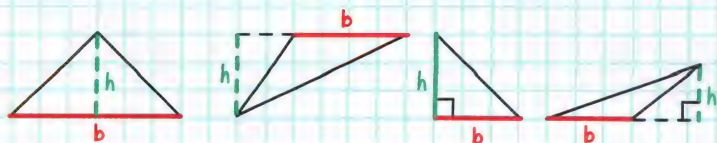
Để tính diện tích của tam giác, ta nhân $\frac{1}{2}$ với tích của chiều dài đáy và chiều cao.

$$A = \frac{1}{2} \cdot \text{đáy} \cdot \text{chiều cao}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot bh \quad A = \frac{bh}{2}$$

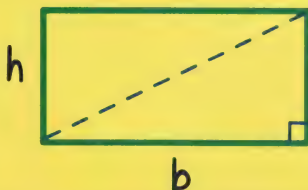
b = đáy
 h = chiều cao

Chiều cao là chiều dài của đường vuông góc vẽ từ một đỉnh đến cạnh đáy. Đường cao có thể nằm trong hoặc nằm ngoài tam giác.



Nếu ta cắt đi một nửa hình chữ nhật theo đường chéo thì diện tích của hình tam giác còn lại chỉ bằng nửa diện tích của hình chữ nhật ban đầu - đó là lý do vì sao công thức tính diện tích của tam giác là:

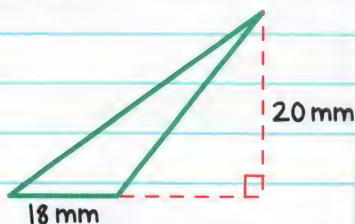
$$A = \frac{bh}{2} \text{ hoặc } \frac{1}{2}bh$$



VÍ DỤ: Tìm diện tích của tam giác.

$$A = \frac{bh}{2}$$

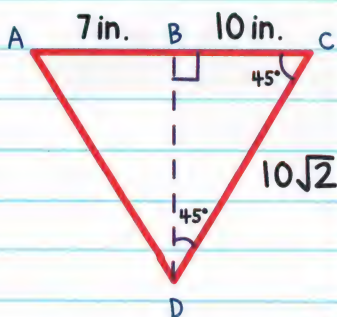
$$A = \frac{(18)(20)}{2} = 180$$



$$A = 180 \text{ mm}^2$$

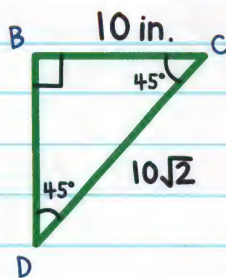
VÍ DỤ: Tìm diện tích của tam giác.

Coi AC = 17 là đáy và BD là chiều cao.



Ta có thể tìm chiều dài BD
bằng cách xét tam giác vuông
đặc biệt $45^\circ-45^\circ-90^\circ$:

Các cạnh góc vuông bằng
nhau nên ta có:



$$BD = BC$$

$$BD = 10 \text{ in.}$$

Bây giờ ta đã có tất cả các thông tin cần thiết để tìm
diện tích,

$$A = \frac{bh}{2}$$

$$A = \frac{(17)(10)}{2} = 85$$

$$A = 85 \text{ in.}^2$$

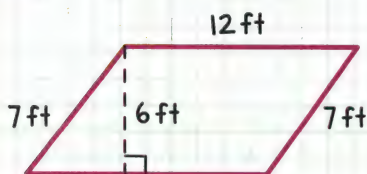




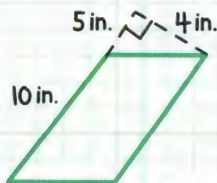
BÀI TẬP

Với câu 1 và 2, hãy tìm diện tích của hình bình hành.

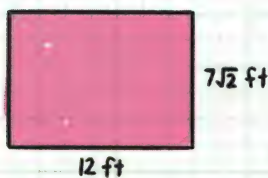
1.



2.



3. Ray cố đẩy một khung hình chữ nhật dời đi nhưng bạn ấy lại làm hình chữ nhật méo đi thành một hình bình hành. Hỏi diện tích của hình bình hành là bao nhiêu?



KHUNG BAN ĐẦU



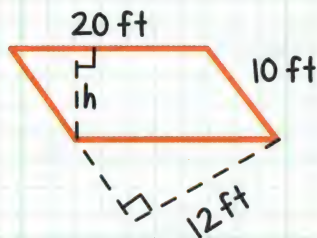
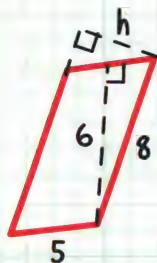
KHUNG BỊ MÉO

Gợi ý: Chiều dài các cạnh không thay đổi nhưng chiều cao có khác. Ta xét tam giác vuông $45^\circ-45^\circ-90^\circ$ để tìm chiều cao của hình bình hành.

BÀI TẬP

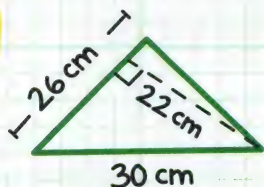
Trong câu 4 và 5, hãy tìm h trong hình bình hành.

4.



Trong câu 6-8, hãy tìm diện tích của tam giác.

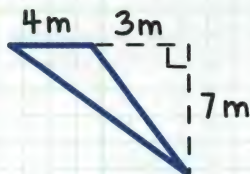
6.



7.



8.



LỜI GIẢI



1. (Sử dụng công thức $A = bh = (12)(6)$.); 72 ft^2
2. (Sử dụng công thức $A = bh = (10)(4)$.); 40 in.^2
3. (Sử dụng công thức $A = bh = (12)(7)$.); 84 ft^2
4. (Sử dụng công thức $A = bh = 5(6) = 30$. Sau đó thay 30 trở lại phương trình để tìm giá trị của h . $30 = 8h$);
 $\frac{15}{4}$
5. (Sử dụng công thức $A = bh = 12(10) = 120$. Sau đó thay 120 trở lại phương trình để tìm giá trị của h . $120 = 20h$); 6 ft^2
6. (Sử dụng công thức $A = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(22)(26)$); 286 cm^2
7. (Đầu tiên tìm chiều cao của tam giác $16^2 + h^2 = 20^2$, vậy $h = 12$. Sau đó sử dụng công thức $A = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(16 + 10)(12)$); 156 mm^2
8. (Sử dụng công thức $A = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(4)(7)$); 14 m^2

Chương 46

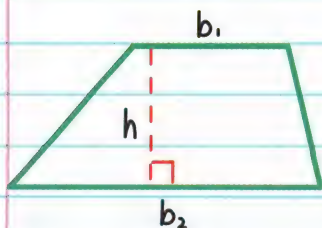
DIỆN TÍCH CỦA CÁC HÌNH ĐA GIÁC KHÁC

DIỆN TÍCH CỦA HÌNH THANG

Để tính diện tích hình thang, ta dùng công thức sau:

$$A = \frac{1}{2} h(b_1 + b_2)$$

h = chiều cao (khoảng cách giữa hai đáy)



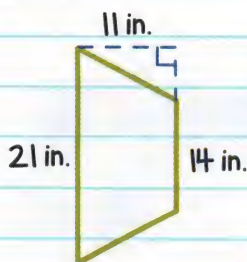
b_1 và b_2 là chiều dài của hai đáy (hai cạnh song song) theo thứ tự bất kỳ

VÍ DỤ: Tìm diện tích của hình thang đã cho.

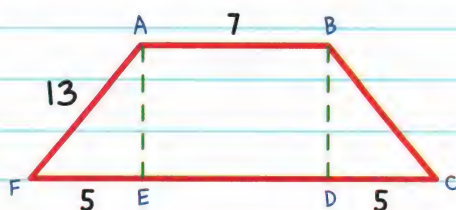
$$A = \frac{1}{2} h(b_1 + b_2)$$

$$= \frac{1}{2} (11)(21 + 14) = 192,5$$

$$A = 192,5 \text{ in.}^2$$



VÍ DỤ: Tìm diện tích của hình thang đã cho.



Bước 1: Tìm chiều cao AE.

Xét $\triangle AEF$, áp dụng định lý Pytago để tìm chiều cao AE.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Hoặc sử dụng bộ số Pytago.

$$FE^2 + AE^2 = AF^2$$

$$5^2 + h^2 = 13^2$$

$$h^2 = 144$$

$$h = 12$$

Bước 2: Tìm chiều dài các đáy.

\overline{AB} là một đáy, vậy $\overline{AB} = b_1 = 7$.

\overline{FC} là đáy kia, nhưng ta cần tìm ED để biết chiều dài của \overline{FC} .

$ABDE$ là hình chữ nhật, do đó $AB = ED$.

Các cạnh đối
của hình chữ
nhật có chiều
dài bằng nhau.

$$\overline{FC} = FE + ED + DC$$

$$\overline{FC} = 5 + 7 + 5$$

$$= 17$$

$$b_2 = 17$$

Bước 3: Tìm diện tích.

$$A = \frac{1}{2} h(b_1 + b_2)$$

$$= \frac{1}{2} (12)(7 + 17)$$

$$= \frac{1}{2} (12)(24)$$

$$= 144$$

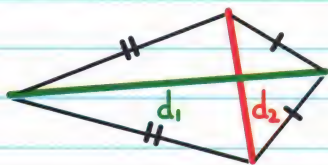
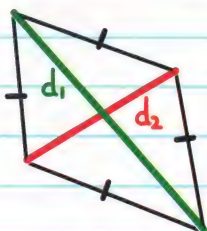
Vậy diện tích là 144.

DIỆN TÍCH CỦA HÌNH THOI VÀ HÌNH ĐIỀU

Để tìm diện tích của hình thoi hoặc hình điều, ta sử dụng công thức sau:

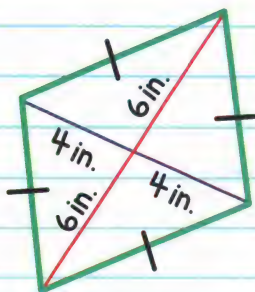
$$A = \frac{1}{2} d_1 d_2$$

d_1 và d_2 là chiều dài của hai đường chéo (theo thứ tự bất kỳ)



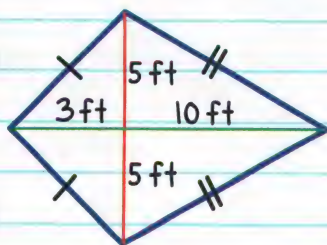
VÍ DỤ: Tìm diện tích của hình thoi đã cho.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} d_1 d_2 \\ &= \frac{1}{2} (6 + 6)(4 + 4) \\ &= \frac{1}{2} (12)(8) \\ &= 48 \end{aligned}$$



Diện tích của hình thoi là 48 in.²

VÍ DỤ: Một con diều lớn được trang trí bằng hoa hồng để làm phao dùm trong dịp diễu hành. Hỏi nếu mỗi foot vuông người ta dùng 30 bông hồng để trang trí chiếc phao thì cần bao nhiêu bông hồng cho con diều?



Trước tiên ta tìm diện tích của con diều.

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} d_1 d_2 \\
 &= \frac{1}{2} (13)(10) \\
 &= \frac{1}{2} (130) \\
 &= 65
 \end{aligned}$$

Diện tích của con diều = 65 ft²

Bây giờ ta có thể tìm số bông hồng cần dùng.

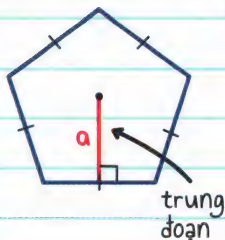
$$65 \text{ ft}^2 \left(\frac{30 \text{ bông hồng}}{\text{ft}^2} \right) = 1950 \text{ bông hồng}$$

Vậy người ta cần 1950 bông hồng để trang trí con diều.

DIỆN TÍCH CỦA ĐA GIÁC ĐỀU

Ta sử dụng công thức này để tìm diện tích của đa giác đều:

$$A = \frac{1}{2} aP$$



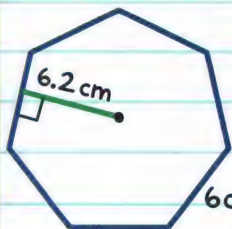
a = chiều dài của **TRUNG ĐOẠN**, khoảng cách vuông góc từ tâm đến một cạnh

Đa giác đều có chiều dài tất cả các cạnh bằng nhau

P = chu vi, tổng chiều dài tất cả các cạnh

VÍ DỤ: Tìm diện tích của hình bảy cạnh đều.

Hình bảy cạnh đều có 7 cạnh bằng nhau.



Vì hình bảy cạnh có 7 cạnh đều bằng 6 cm nên chu vi là:

$$P = 7(6 \text{ cm}) = 42 \text{ cm}$$

$$\text{hoặc } 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 42$$

Trung đoạn = 6.2 cm

$$A = \frac{1}{2} aP$$

$$= \frac{1}{2} (6.2)(42) = 130.2$$

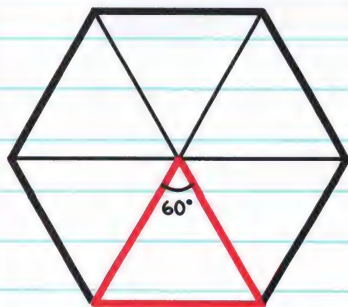
$$A = 130.2 \text{ cm}^2$$

Nếu không biết trung đoạn,
ta có thể sử dụng kiến thức
lượng giác để tìm.

VÍ DỤ: Một bảng trò chơi điện
tử có hình lục giác đều. Hỏi diện
tích của bảng là bao nhiêu biết
chiều dài mỗi cạnh là 10 inch?



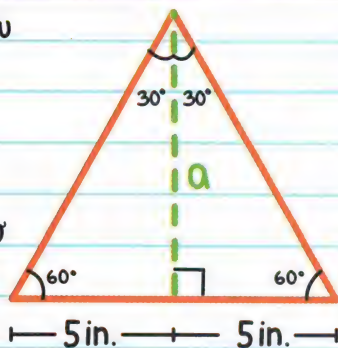
Hình lục giác đều có thể chia thành 6 tam giác bằng
nhau. Góc ở tâm của mỗi tam giác là 60° .



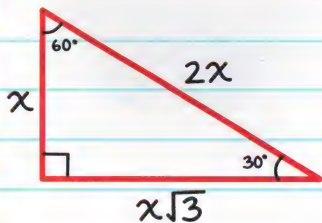
$$360^\circ \div 6 = 60^\circ$$

Trung đoạn chia tam giác đều này thành hai tam giác

Không phải mọi đa giác đều chia được thành tam giác như vậy. Điều này chỉ đặc biệt đúng với lục giác đều.



Ta xét tam giác vuông đặc biệt $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ để tìm trung đoạn.



Các tam giác $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ có tỷ số các cạnh là $1:2:\sqrt{3}$

cạnh góc vuông dài hơn = cạnh góc vuông ngắn hơn $\times \sqrt{3}$

$$a = 5 \times \sqrt{3} \text{ in.}$$

Trung đoạn là: $a = 5\sqrt{3} \text{ in.}$

Chu vi của lục giác là:

$$P = 6(10 \text{ in.}) = 60 \text{ in.}$$

Bây giờ ta đã có đủ thông tin cần thiết để tìm diện tích:

$$A = \frac{1}{2} aP$$

$$= \frac{1}{2} (5\sqrt{3} \text{ in.})(60 \text{ in.})$$

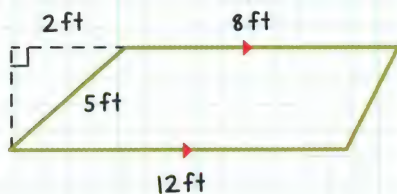
$$= 150\sqrt{3} \text{ in.}^2 \approx 259,8 \text{ in.}^2$$





BÀI TẬP

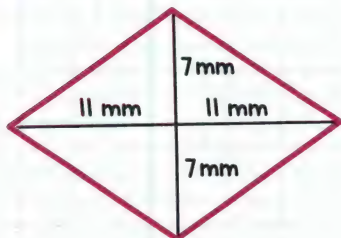
1. Tìm diện tích của hình thang (Gợi ý: Sử dụng định lý Pytago để tìm chiều cao.)



2. Jessica đang sơn tường trong phòng cô ấy. Bức tường hình thang cân như trong hình vẽ dưới đây. Cô ấy mua một hộp sơn và quét được 400 foot². Jessica dự định sơn hai lớp. Hỏi cô ấy có đủ sơn không?



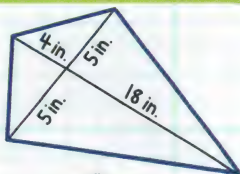
3. Tìm diện tích của hình thoi đã cho.





BÀI TẬP

4. Tìm diện tích của hình điều đã cho.

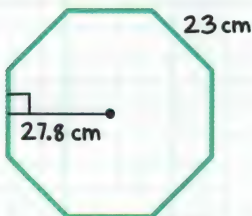


5. Một thợ làm bánh đang nướng một chiếc bánh quy rất to hình thoi. Hỏi diện tích bánh quy là bao nhiêu biết chiều dài mỗi cạnh bánh quy là 21 inch và chiều dài một đường chéo là 34 inch? Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất.

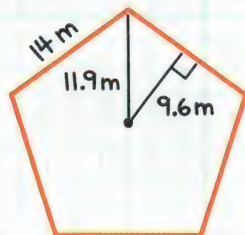


Với câu 6 và 7, hãy tìm diện tích của các đa giác đều sau:

6.



7.



8. Mishal đang lát gạch cho cái sân hình lục giác đều như trong hình vẽ. Cô ấy dùng loại đá 3,15 đô-la cho mỗi foot vuông. Hỏi cô ấy phải bỏ ra bao nhiêu tiền đá để lát hết mảnh sân? Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất.



LỜI GIẢI



1. (Sử dụng công thức $2^2 + h^2 = 5^2$, vậy $h^2 = \sqrt{21}$.
Sau đó sử dụng $A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2) = \frac{1}{2}\sqrt{21}(8 + 12).$)
 $10\sqrt{21} \text{ ft}^2 \approx 45,8 \text{ ft}^2$

2. Có (Diện tích của bức tường là 126 ft^2 .)

3. (Sử dụng công thức $A = \frac{1}{2}d_1d_2 = \frac{1}{2}(7 + 7)(11 + 11).$); 154 mm^2

4. (Sử dụng công thức $A = \frac{1}{2}d_1d_2 = \frac{1}{2}(5 + 5)(4 + 18).$); 110 in.^2

5. (Sử dụng định lý Pytago. $21^2 = x^2 + 17^2$; $x = \sqrt{152}$.)

Sau đó $A = \frac{1}{2}d_1d_2 = \frac{1}{2}(34)(2\sqrt{152}).$; $419,2 \text{ in.}^2$

6. (Sử dụng công thức $A = \frac{1}{2}aP = \frac{1}{2}(27.8)(8)(23).$);
 $2.557,6 \text{ cm}^2$

7. (Sử dụng công thức $A = \frac{1}{2}aP = \frac{1}{2}(9.6)(5)(14).$); 336 m^2

8. $A = \frac{1}{2}aP = \frac{1}{2}(6\sqrt{3})(72) \approx 374,12$

Tổng chi phí = tổng diện tích x giá thành mỗi foot vuông

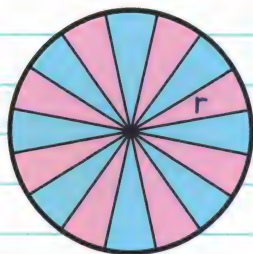
$= 374,12 \times \$3,15 = \$1.178,48$

Chương 47

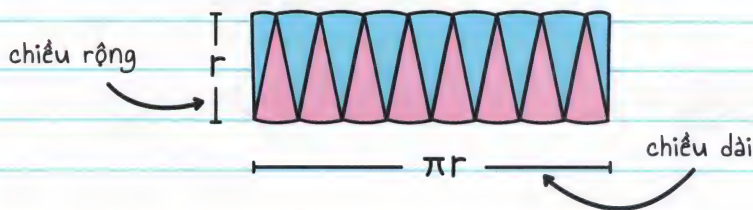
DIỆN TÍCH CỦA HÌNH TRÒN VÀ HÌNH QUẠT

DIỆN TÍCH CỦA HÌNH TRÒN

Để tìm công thức tính diện tích hình tròn, ta chia hình tròn thành các tam giác.



Các tam giác từ hình tròn có thể xếp lại để tạo thành một hình chữ nhật.



Chiều rộng của hình chữ nhật là bán kính của hình tròn.
Chiều dài của hình chữ nhật là một nửa chu vi hình tròn.

Diện tích là:

$A = \text{chiều rộng} \times \text{chiều dài}$

$$= \pi r \times r$$

$$= \pi r^2$$

Công thức tính diện tích hình tròn.

Diện tích = $\pi \cdot \text{bán kính bình phương}^2$

HOẶC

$A = \pi r^2$ ← kết quả có đơn vị là bình phương đơn vị độ dài



Mẹo ghi nhớ:
Hãy nghĩ rằng
Diện tích = πr^2
↑
"Phi ra phươong"

VÍ DỤ: Hãy tìm diện tích của hình tròn đã cho.

$$A = \pi r^2$$

$$A = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$$

$$A = 4\pi \text{ cm}^2 \approx 12.6 \text{ cm}^2$$



VÍ DỤ: Tìm diện tích của hình tròn có chu vi là 10π mét.

Sử dụng công thức tính chu vi để tìm bán kính:

$$C = 2\pi r$$

$$10\pi = 2\pi r$$

$$r = 5$$

Bây giờ ta tìm diện tích:

$$A = \pi r^2$$

$$= \pi \times 5^2 = 25\pi$$

$$A = 25\pi \text{ m}^2 \approx 78,5 \text{ m}^2$$

VÍ DỤ: Tìm bán kính của hình tròn có diện tích bằng 144π inch vuông.

$$A = \pi r^2$$

$$144\pi = \pi r^2$$

$$144 = r^2$$

$$r = 12$$

Bán kính cần tìm là 12 in.

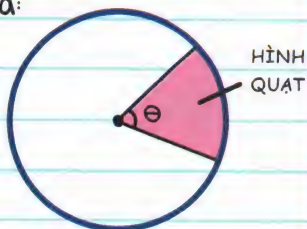
Diện tích của hình quạt

Ta có thể tìm diện tích của hình quạt (lát) bằng TỶ LỆ THỨC so sánh hình quạt với toàn bộ hình tròn.

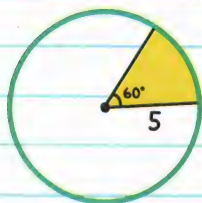
Công thức tính diện tích hình quạt là:

$$A = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$$

θ = độ đo góc của hình quạt



Để tìm diện tích của hình quạt này:



$$\frac{\text{Diện tích hình quạt}}{\pi(5)^2} = \frac{60^\circ}{360^\circ}$$

độ đo góc
hình quạt

$$\frac{\text{Diện tích hình quạt}}{\pi r^2} = \frac{\theta}{360^\circ}$$

Diện tích của
hình tròn

độ đo của
cả hình
tròn

$$\pi(5)^2 \times \frac{\text{Diện tích hình quạt}}{\pi(5)^2} = \frac{60^\circ}{360^\circ} \times \pi(5)^2$$

Nhân cả hai
vế với $\pi(5)^2$.

$$\text{Diện tích hình quạt} = \frac{60^\circ}{360^\circ} \times \pi(5)^2$$

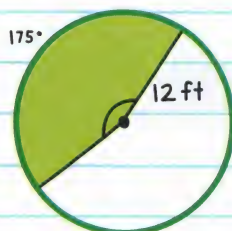
Rút gọn.

$$= \frac{25\pi}{6} \approx 13,1$$

VÍ DỤ: Tìm diện tích của hình quạt được tô màu.

$$\begin{aligned} A &= \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2 \\ &= \frac{175^\circ}{360^\circ} \times \pi (12)^2 = 70\pi \end{aligned}$$

$$A = 70\pi \text{ ft}^2 \approx 219,8 \text{ ft}^2$$



SỐ ĐO GÓC Ở TÂM BẰNG
VỚI SỐ ĐO CUNG BỊ CHẮN

VÍ DỤ: Một bảng phi tiêu bán kính 8,8 inch có một hình quạt với góc 18°. Hãy tìm diện tích của hình quạt đó.

$$A = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$$

$$A = \frac{18^\circ}{360^\circ} \times \pi (8,8)^2$$

$$A \approx 12,2 \text{ in.}^2$$





BÀI TẬP

Với câu 1 và 2, hãy tìm diện tích hình tròn.

1.



2.



3. Tìm bán kính của hình tròn có diện tích $121\pi \text{ ft}^2$.

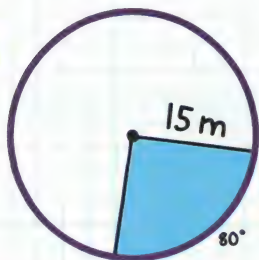
4. Tìm đường kính của hình tròn có diện tích $81\pi \text{ cm}^2$.

5. Tìm diện tích của hình tròn có chu vi $28\pi \text{ mm}$.

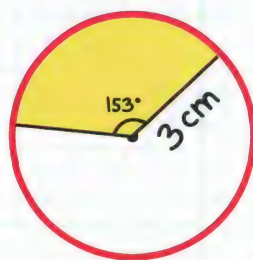
Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất.

Với câu 6 và 7, tìm diện tích của phần hình tròn được tô màu. Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất.

6.



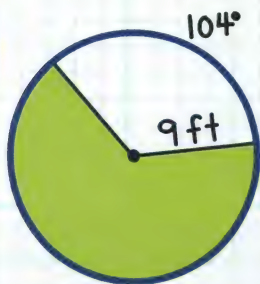
7.



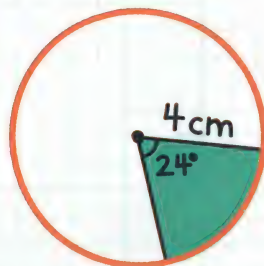
BÀI TẬP

Với câu 8 và 9, tìm diện tích của phần hình tròn được tô màu. Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất.

8.



9.



10. Một chiếc bánh pi-za có đường kính dài 16 inch. James ăn một lát 45° . Hỏi diện tích của phần pi-za còn lại là bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất.

LỜI GIẢI



1. (Sử dụng công thức $A = \pi r^2 = \pi(15)^2$); $225\pi \text{ m}^2 \approx 706,5 \text{ m}^2$
2. (Sử dụng công thức $A = \pi r^2 = \pi(17)^2$); $289\pi \text{ in.}^2 \approx 907,9 \text{ in.}^2$
3. 11 ft
4. 18 cm
5. (Trước tiên sử dụng công thức tìm bán kính: $C = 2\pi r$, $28\pi = 2\pi r$, $r = 14$. Sau đó sử dụng công thức $A = \pi r^2 = \pi(14)^2$); $615,4 \text{ mm}^2$
6. (Sử dụng công thức $A = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2 = \frac{80}{360} \times \pi(15)^2$); $157,1 \text{ m}^2$
7. (Sử dụng công thức $A = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2 = \frac{153}{360} \times \pi(3)^2$); $12,0 \text{ cm}^2$
8. (Sử dụng công thức $A = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2 = \frac{360 - 104}{360} \times \pi(9)^2$); $181,0 \text{ ft}^2$
9. (Sử dụng công thức $A = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2 = \frac{24}{360} \times \pi(4)^2$); $3,4 \text{ cm}^2$
10. (Sử dụng công thức $A = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2 = \frac{360 - 45}{360} \times \pi(8)^2$); $175,9 \text{ in.}^2$

Chương 48

DIỆN TÍCH CỦA HÌNH TỔNG HỢP

HÌNH TỔNG HỢP là hình tạo thành từ hai hay nhiều hình cơ bản khác trong hình học.

Ví dụ:



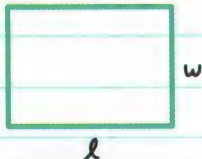
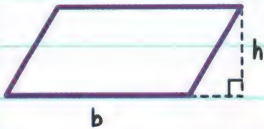
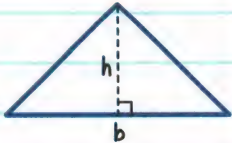
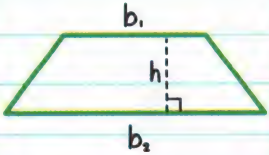
Để tìm diện tích của hình tổng hợp:

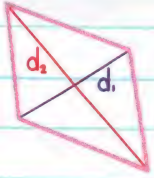
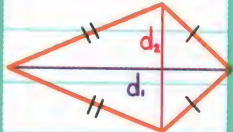



Bước 1: Chia hình tổng hợp thành các hình cơ bản thành phần.

Bước 2: Tìm diện tích của mỗi hình cơ bản.

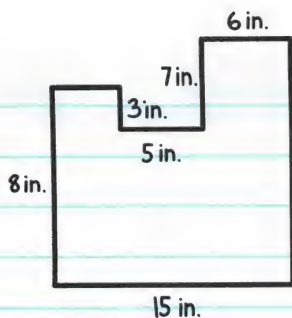
Bước 3: Cộng tất cả các diện tích vừa tìm lại (và trừ phần thiếu bất kỳ nếu cần) để tìm diện tích của toàn bộ hình tổng hợp.

Công thức cần nhớ để tính diện tích của hình tổng hợp:

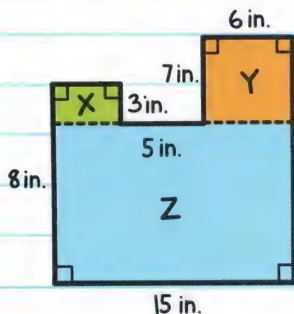
TÊN HÌNH	CÔNG THỨC	HÌNH VẼ
Hình chữ nhật	$A = \ell w$ ℓ = chiều dài, w = chiều rộng	
Hình bình hành	$A = bh$ b = đáy, h = chiều cao	
Hình tam giác	$A = \frac{bh}{2}$ b = đáy, h = chiều cao	
Hình thang	$A = \frac{1}{2} h(b_1 + b_2)$ h = chiều cao, b_1 và b_2 là các đáy	

TÊN HÌNH	CÔNG THỨC	HÌNH VẼ
Hình thoi	$A = \frac{1}{2} d_1 d_2$ d_1 và d_2 là các đường chéo	
Hình điều	$A = \frac{1}{2} d_1 d_2$ d_1 và d_2 là các đường chéo	
Hình đa giác đều	$A = \frac{1}{2} aP$ a = trung đoạn P = chu vi	
Hình tròn	$A = \pi r^2$ r = bán kính	
Hình quạt	$A = \frac{\theta}{360^\circ} \cdot \pi r^2$ θ là góc của hình quạt r = bán kính	

VÍ DỤ: Tìm diện tích của hình tổng hợp đã cho.

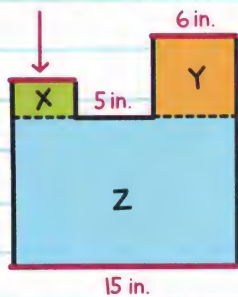


Bước 1: Chia hình tổng hợp thành các hình chữ nhật.

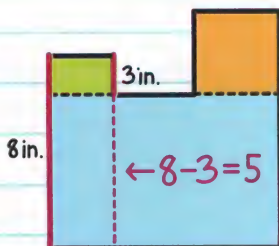


Vì diện tích của hình chữ nhật là chiều dài \times chiều rộng nên ta cần tìm chiều dài còn thiếu của hình chữ nhật màu xanh lá cây...

$$15 - 5 - 6 = 4$$



... và chiều rộng của hình chữ nhật màu xanh nước biển.

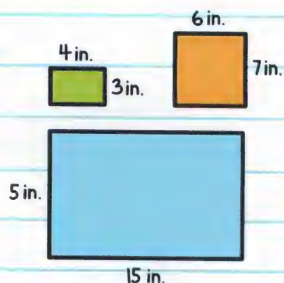


Bước 2: Tính diện tích của mỗi hình.

Tổng diện tích = $lw + lw + lw$

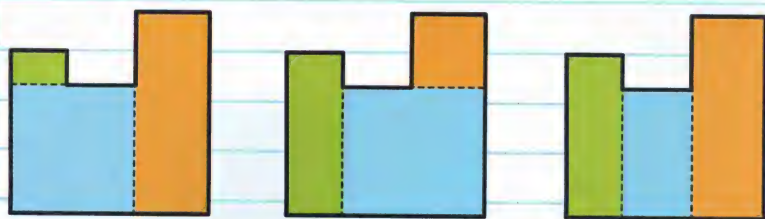
$$= (4)(3) + (6)(7) + (15)(5)$$

$$= 12 + 42 + 75 = 129$$

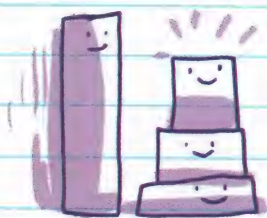


Diện tích của hình cần tìm là 129 in^2 .

Chú ý: Ta có thể chia hình đã cho theo các cách khác nhau.

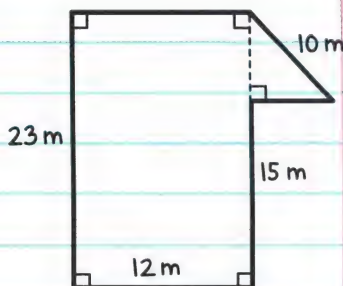


Hãy chọn cách chia yêu cầu
tính toán ít nhất và dễ nhất.



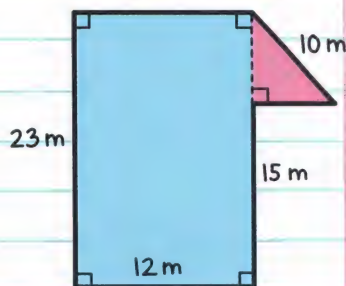
VÍ DỤ: Tìm diện tích của hình tổng hợp đã cho.

1. Chia hình tổng hợp thành một hình chữ nhật và một hình tam giác.



2. Tìm đáy và chiều cao của hình tam giác:

$$h = 23 - 15 = 8$$

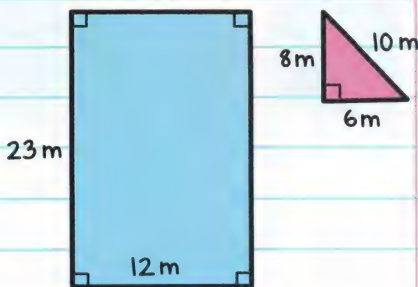


Tam giác này là tam giác vuông, vậy ta sử dụng định lý Pytago để tìm đáy:

$$8^2 + b^2 = 10^2$$

$$b^2 = 36$$

$$b = 6$$



3. Tính diện tích của mỗi hình thành phần và cộng các diện tích đó lại.

Tổng diện tích = diện tích hình chữ nhật + diện tích hình tam giác

$$= lw + \frac{bh}{2}$$

$$= (12)(23) + \frac{(6)(8)}{2}$$

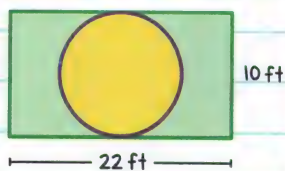
$$= 276 + 24 = 300$$

Vậy diện tích của hình cần tìm là 300 m².

Ta cũng có thể tìm diện tích của hình tổng hợp bằng cách trừ đi diện tích của hình thành phần.

VÍ DỤ: Tìm diện tích của hình tròn.

Đường kính của hình tròn là chiều rộng của hình chữ nhật, 10 foot.



Do đó, bán kính là 5 foot.

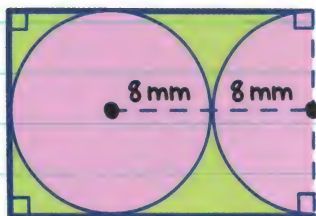
Diện tích của hình tròn là:

$$A = \pi r^2$$

$$A = \pi(5)^2$$

$$A = 25\pi \text{ ft}^2 \approx 78,5 \text{ ft}^2$$

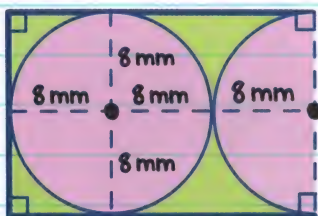
VÍ DỤ: Tìm diện tích của hình được tô màu đậm.



1. Tách hình tròn và hình bán nguyệt khỏi hình chữ nhật.



2. Tìm chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật qua bán kính của hình tròn và hình bán nguyệt.



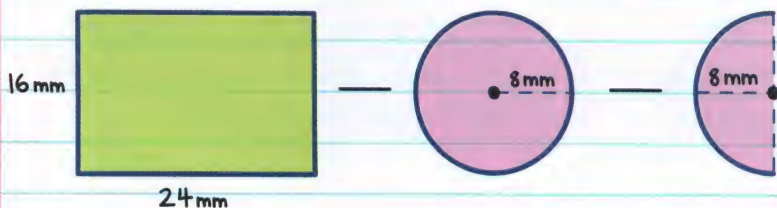
Chiều dài của hình chữ nhật = đường kính hình tròn + bán kính hình tròn

$$l = 8 + 8 + 8 = 24$$

Chiều rộng của hình chữ nhật = đường kính hình tròn

$$w = 8 + 8 = 16$$

3. Trừ diện tích của hình chữ nhật cho diện tích của hình tròn và $\frac{1}{2}$ diện tích của hình tròn.



Tổng diện tích:

= diện tích hình chữ nhật - diện tích hình tròn - diện tích hình bán nguyệt

$$= lw - \pi r^2 - \frac{1}{2} \pi r^2$$

$$= (24)(16) - \pi(8)^2 - \frac{1}{2} \pi(8)^2$$

$$= 384 - 64\pi - 32\pi = 384 - 96\pi \approx 82,4$$

một nửa
diện tích
hình tròn

Vậy diện tích của hình cần tìm
là $82,4 \text{ mm}^2$.

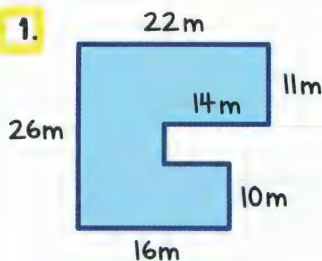




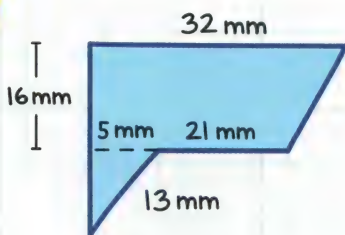
BÀI TẬP

Từ câu 1-8, hãy tìm diện tích hình tô màu. Giả sử tất cả các góc vuông trong hình vẽ đều là góc vuông. Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất nếu cần.

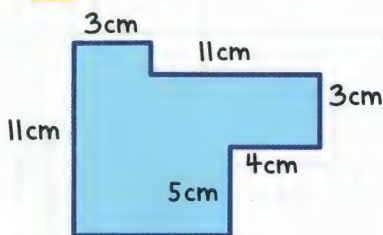
1.



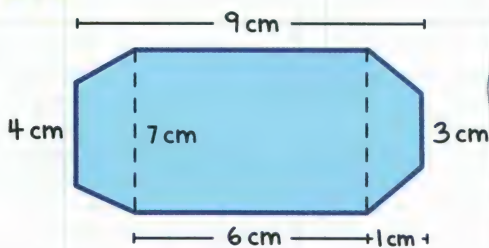
3.



2.

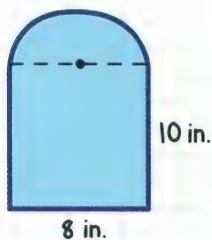


4.

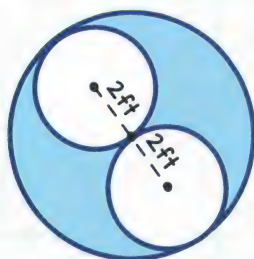


BÀI TẬP

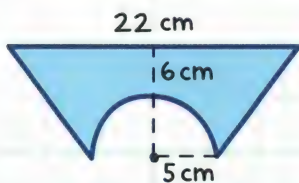
5.



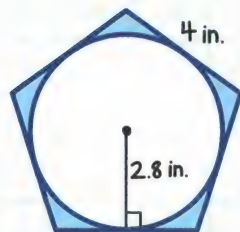
7.



6.



8.



LỜI GIẢI



1. 442 m^2

3. 494 mm^2

2. 101 cm^2

4. 58 cm^2

5. $105,1 \text{ in.}^2$

6. Tổng diện tích = diện tích của hình thang - diện tích của hình bán nguyệt

$$= \frac{1}{2}h(b_1 + b_2) - \frac{1}{2}\pi r^2$$

$$= \frac{1}{2}(11)(22 + 10) - \frac{1}{2}\pi(5)^2 = 136,7 \text{ cm}^2$$

7. Tổng diện tích = diện tích của hình tròn lớn - $2 \times$ diện tích của hình tròn nhỏ

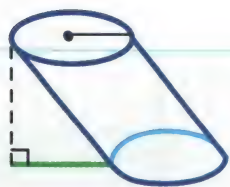
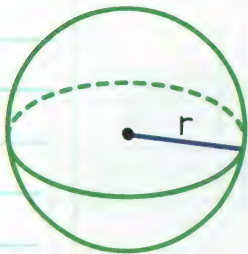
$$= \pi r^2 - 2\pi r^2$$

$$= \pi(4)^2 - 2\pi(2)^2 = 25,1 \text{ ft}^2$$

8. Tổng diện tích = diện tích của hình ngũ giác - diện tích của hình tròn

$$= \frac{1}{2}aP - \pi r^2$$

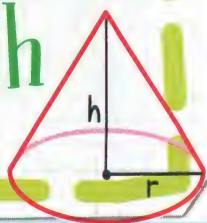
$$= \frac{1}{2}(2,8)(20) - \pi(2,8)^2 = 3,4 \text{ in.}^2$$



BÀI 10



Diện tích xung
quanh, diện tích toàn
phần và thể tích



Chương 49

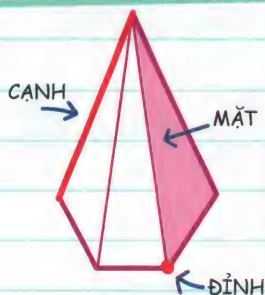
DIỆN TÍCH XUNG QUANH, DIỆN TÍCH TOÀN PHẦN CỦA HÌNH LĂNG TRỤ VÀ HÌNH TRỤ

Hình **BÁCHIỆU (3-D)** là hình có chiều dài, chiều rộng và chiều cao. Chúng còn được gọi là **HÌNH KHÔNG GIAN** hoặc **HÌNH KHỐI**.

DIỆN TÍCH TOÀN PHẦN là diện tích các mặt bao quanh hình.

HÌNH ĐA DIỆN là một hình 3D tạo bởi các đa giác. Các bề mặt phẳng bao quanh đa giác gọi là các **MẶT**. Các đoạn thẳng tại các mặt giao nhau gọi là các **CẠNH**. Các **ĐỈNH** là các điểm tại đó ba hay nhiều cạnh giao nhau (các góc).

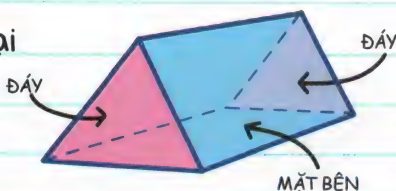
Từ bắt nguồn từ tiếng Hy Lạp, **đa** là "nhiều", **diện** là "mặt"



HÌNH LĂNG TRỤ

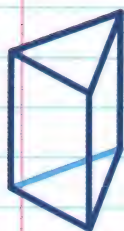
HÌNH LĂNG TRỤ là một dạng hình đa diện tạo bởi hai mặt là đa giác song song và bằng nhau, gọi là các **ĐÁY**. Các mặt còn lại được gọi là **MẶT BÊN**, các mặt bên đều là hình bình hành.

Hình lăng trụ được phân loại theo loại hình của đáy.



LĂNG TRỤ CHỮ NHẬT có tất cả các góc vuông, hai đáy là các hình chữ nhật song song, các mặt bên đều là hình bình hành.

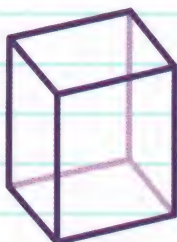
LĂNG TRỤ TAM GIÁC có hai đáy là các tam giác song song và các mặt bên là hình bình hành.



LĂNG TRỤ
TAM GIÁC



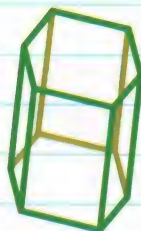
LĂNG TRỤ
HÌNH VUÔNG



LĂNG TRỤ
CHỮ NHẬT



LĂNG TRỤ
NGŨ GIÁC

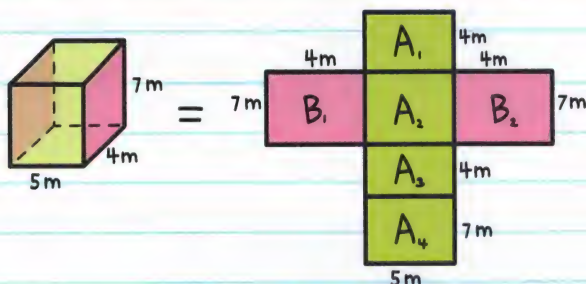


LĂNG TRỤ
LỤC GIÁC

DIỆN TÍCH TOÀN PHẦN (Stp) của một hình đa diện là tổng diện tích các mặt của nó. Ta có thể tính diện tích toàn phần của một hình đa diện bằng cách cộng diện tích hai đáy và diện tích các mặt bên.

DIỆN TÍCH XUNG QUANH (Sxq) là tổng diện tích của các mặt bên.

Diện tích toàn phần của một hình lăng trụ có thể tính bằng cách mở hình lăng trụ ra ép **PHẪNG** xuống, ta sẽ được biểu diễn hai chiều các mặt của hình lăng trụ.



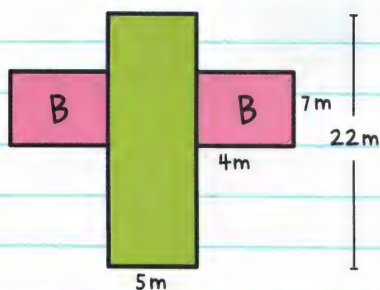
Khi đó ta có thể tìm diện tích toàn phần bằng cách cộng các diện tích của mỗi mặt.

$$\begin{aligned}
 \text{Diện tích toàn phần} &= B_1 + B_2 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \quad \text{các mặt bên} \\
 \text{các đáy} &= (4 \times 7) + (4 \times 7) + (5 \times 4) + (5 \times 7) + (5 \times 4) + (5 \times 7) \\
 &= 28 + 28 + 20 + 35 + 20 + 35 \\
 &= 166
 \end{aligned}$$

Diện tích toàn phần = 166 m^2

Cách giải khác:

Cộng diện tích của hai đáy
(hai hình chữ nhật màu hồng)
và diện tích của các mặt bên
- diện tích xung quanh (hình
chữ nhật màu xanh lá cây).



Diện tích hai đáy = lw

$$= 4 \times 7 = 28$$

Diện tích xung quanh = lw

$$= (5)(4 + 7 + 4 + 7)$$

$$= 5 \times 22$$

$$= 110$$

Chiều dài
của phần
diện tích
xung quanh
bằng chu vi
của đáy (P).

Diện tích toàn phần = 2 × diện tích một đáy + diện tích xung quanh

$$= 2(28) + 110$$

$$= 56 + 110$$

$$= 166$$

Diện tích toàn phần = 166 m^2

Diện tích xung quanh của
hình lăng trụ

$$S_{xq} = Ph$$

Diện tích toàn phần của
hình lăng trụ

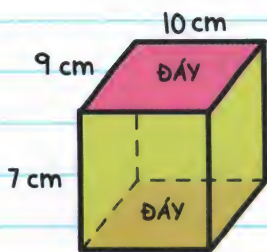
$$S_{tp} = 2B + Ph$$

B = diện tích một đáy

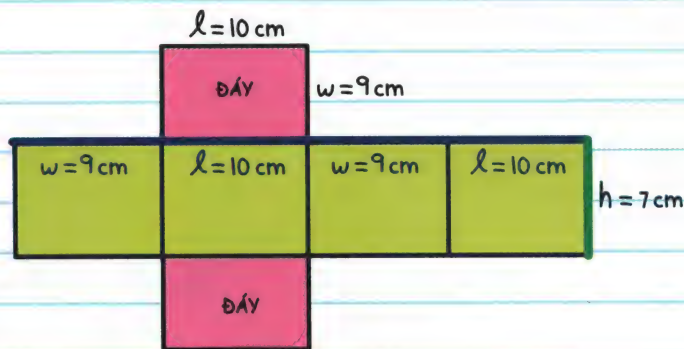
P = chu vi đáy

h = chiều cao của lăng trụ

VÍ DỤ: Tìm diện tích toàn phần của hình lăng trụ chữ nhật.



Ta có thể ép phẳng hình ra để nhìn diện tích các mặt được rõ hơn.



Để sử dụng công thức $SA = 2B + Ph$, trước tiên ta tìm giá trị của B , diện tích của đáy hình chữ nhật:

$$B = lw \text{ (chiều dài} \times \text{chiều rộng)}$$

$$= 10 \times 9 = 90$$

Sau đó ta tìm giá trị của P , chu vi của đáy:

$$P = 9 + 10 + 9 + 10 = 38$$

Bây giờ ta đã có đủ thông tin để tìm diện tích toàn phần:

Cách 1

$$S_{tp} = 2B + Ph$$

$$= 2(90) + (38)(7)$$

$$= 180 + 266 = 446$$

$$S_{tp} = 446 \text{ cm}^2$$

Kết quả có đơn vị là
đơn vị đo diện tích.

Cách 2

Vì ta đã biết $B = lw$ nên ta
có thể sử dụng công thức

$$S_{tp} = 2lw + Ph$$

$$S_{tp} = 2(lw) + Ph$$

$$= 2(10)(9) + [9 + 10 + 9 + 10](7)$$

$$= 180 + 266 = 446$$

$$S_{tp} = 446 \text{ cm}^2$$



VÍ DỤ: Tìm diện tích toàn phần của hình lăng trụ tam giác.

Các đáy của lăng trụ đã cho là hình tam giác, do vậy để tìm diện tích của đáy ($B = \frac{1}{2}bh$), trước tiên ta tìm chiều dài của đáy tam giác ($b = l + l$).

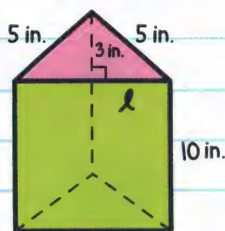
Sử dụng định lý Pytago (hoặc bộ ba số Pytago),

$$3^2 + l^2 = 5^2$$

$$9 + l^2 = 25$$

$$l^2 = 16$$

$$l = 4$$



Chiều dài của đáy tam giác là $b = l + l = 4 + 4 = 8$.

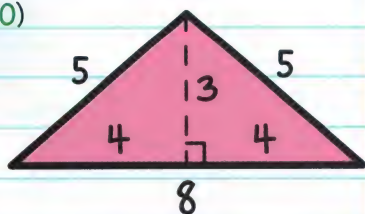
Bây giờ ta đã có đủ thông tin cần thiết để tìm diện tích toàn phần.

$$Stp = 2B + Ph$$

$$= 2 \times \frac{1}{2}bh + Ph$$

$$= 2 \times \frac{1}{2}(8)(3) + (5 + 5 + 8)(10)$$

$$= 24 + 180 = 204$$

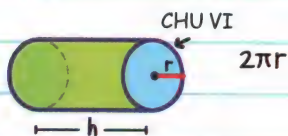


$$Stp = 204 \text{ in.}^2$$

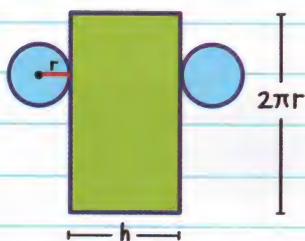
HÌNH TRỤ

Để tìm diện tích toàn phần của hình trụ, ta mở hình trụ và ép phẳng nó ra. Hãy nhìn vào hình ép phẳng.

Khi ta mở hình trụ ra, diện tích xung quanh có hình dạng như một hình chữ nhật. Các đáy có hình dạng như hình tròn.



Cộng diện tích của hai đáy hình tròn và diện tích hình chữ nhật (diện tích xung quanh) thì ta sẽ được tổng diện tích toàn phần.



Chiều dài của hình chữ nhật bằng với chu vi của hình tròn
- nó bám khít quanh hình tròn.

Diện tích toàn phần = diện tích hai hình tròn + diện tích hình chữ nhật

$$= 2 \times \text{diện tích một đáy} + \text{diện tích xung quanh}$$

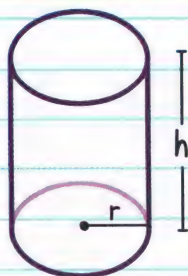
$$= 2 \times \pi r^2 + 2\pi r \times h$$

$$= 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

Diện tích xung
quanh của hình trụ
 $S_{xq} = 2\pi rh$

Diện tích toàn phần
của hình trụ
 $STP = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

r = bán kính đáy
 h = chiều cao của hình trụ



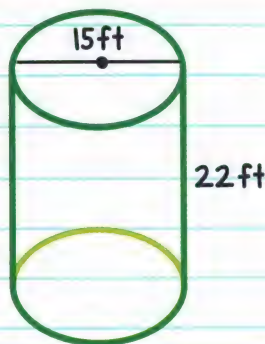
VÍ DỤ: Tìm diện tích toàn phần của hình trụ.

Đường kính của đáy là 15 foot,
nghĩa là bán kính bằng 7,5 foot.

$$S_{tp} = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

$$= 2\pi(7,5)^2 + 2\pi(7,5)(22)$$

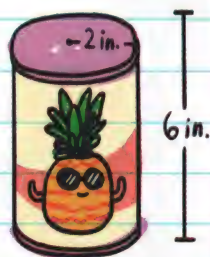
$$= 112,5\pi + 330\pi = 442,5\pi \approx 1.390$$



Diện tích toàn phần cần tìm là xấp xỉ 1.390 ft².

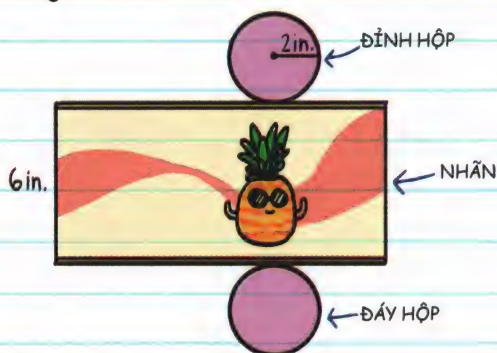


VÍ DỤ: Một công ty đang làm nhãn cho các hộp dừa cắt lát. Bán kính của mỗi hộp là 2 inch và chiều cao là 6 inch. Hỏi diện tích mặt dán của mỗi nhãn là bao nhiêu?



Ta không cần tìm diện tích toàn phần của hộp, vì nhãn chỉ bao quanh phần diện tích xung quanh.

Hình ép phẳng của hộp sẽ như sau:



Diện tích mặt dán mỗi nhãn chính là diện tích xung quanh của hộp.

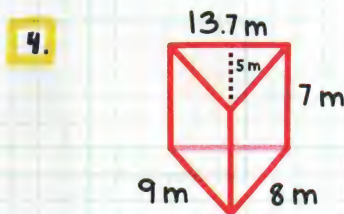
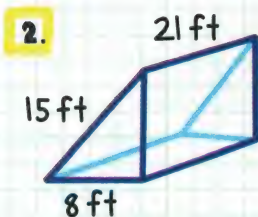
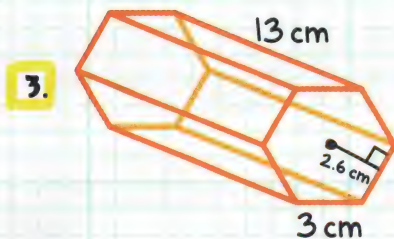
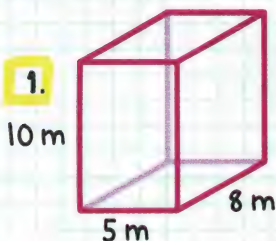
$$\begin{aligned} S_{xq} &= 2\pi rh \\ &= 2\pi(2)(6) \\ &= 24\pi \approx 75,4 \end{aligned}$$

Diện tích mặt dán của mỗi nhãn xấp xỉ $75,4 \text{ in}^2$.



BÀI TẬP

Từ câu 1-4, hãy tìm diện tích toàn phần của mỗi hình lăng trụ. Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất nếu cần.



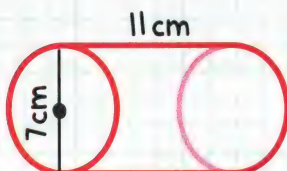
5. David đang gói một hộp quà hình lăng trụ chữ nhật cao 13 inch. Đáy trên và đáy dưới của hộp có các số đo là dài 9 inch và rộng 11 inch. David cần tối thiểu bao nhiêu giấy gói quà?



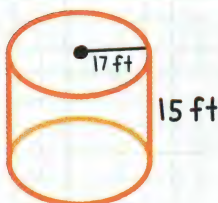
BÀI TẬP

Với câu 6-8, hãy tìm diện tích toàn phần của mỗi hình trụ. Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất.

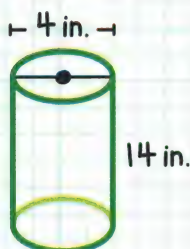
6.



7.



8.



9. Trevor và Manuel mỗi người có một lọ súp hình trụ. Lọ của Trevor có đường kính 3,2 inch và chiều cao 3,8 inch. Lọ của Manuel có đường kính 2,9 inch và chiều cao 4,3 inch. Hỏi lọ của ai có diện tích toàn phần lớn hơn?

LỜI GIẢI



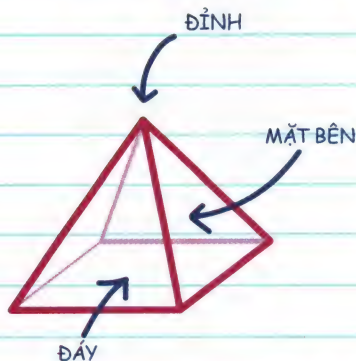
1. $2(5)(10) + 2(5)(8) + 2(10)(8)$; 340 m^2
2. $2\left(\frac{1}{2}\right)(8)(12.7) + 8(21) + 15(21) + 12.7(21)$ (Sử dụng định lý Pytago để tìm chiều cao của tam giác); 851 ft^2
3. $2\left(\frac{1}{2}\right)(2.6)(6)(3) + 6(13)(3)$; 280.8 cm^2
4. $7(8) + 9(7) + 13.7(7) + 2\left(\frac{1}{2}\right)(13.7)(5)$; 283.4 m^2
5. $2(11)(9) + 2(9)(13) + 2(13)(11)$; 718 in^2
6. $2\pi(3.5^2) + 11(2\pi(3.5))$; 318.7 cm^2
7. $2\pi(17^2) + 15(2\pi(17))$; $3,416.3 \text{ ft}^2$
8. $2\pi(2^2) + 14(2\pi(2))$; 201.1 in^2
9. Hộp của Trevor có diện tích toàn phần lớn hơn (Hộp của Trevor: $\text{Stp} \approx 54.3 \text{ in}^2$, hộp của Manuel: $\text{Stp} \approx 52.4 \text{ in}^2$.)

Chương 50

DIỆN TÍCH XUNG QUANH, DIỆN TÍCH TOÀN PHẦN CỦA HÌNH CHÓP VÀ HÌNH NÓN

HÌNH CHÓP

HÌNH CHÓP là hình đa diện trong đó đáy là đa giác còn các mặt bên là tam giác. Các mặt bên giao nhau tại một điểm gọi là ĐỈNH hoặc CHÓP.



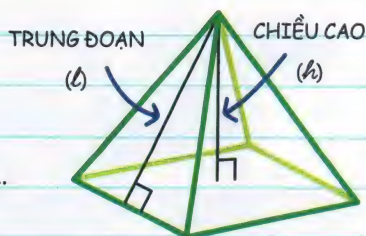
HÌNH CHÓP ĐỀU có các mặt bên bằng nhau và đáy là đa giác đều.

Tất cả các cạnh trong đa giác đều đều bằng nhau

TRUNG ĐOẠN (ℓ) của một hình chóp đều là chiều cao của mặt bên hình tam giác.

CHIỀU CAO CỦA HÌNH CHÓP

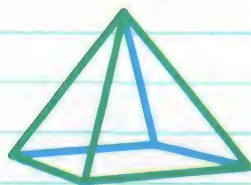
(h) là chiều dài của đường vuông góc vẽ từ đỉnh tới đáy..



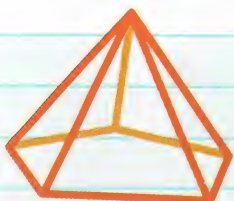
Hình chóp được gọi tên theo hình dạng của đáy.



CHÓP
TAM GIÁC



CHÓP
HÌNH VUÔNG



CHÓP
NGŨ GIÁC



CHÓP
LỤC GIÁC

Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình chóp

Để tính diện tích toàn phần của hình chóp, ta cộng diện tích tất cả các mặt lại. Để tính diện tích toàn phần của hình chóp đều, ta sử dụng các công thức sau:

DIỆN TÍCH XUNG QUANH
CỦA HÌNH CHÓP ĐỀU

$$S_{xq} = \frac{1}{2} Pl$$

DIỆN TÍCH TOÀN PHẦN
CỦA HÌNH CHÓP ĐỀU

$$S_{tp} = B + \frac{1}{2} Pl$$

P = chu vi đáy

l = trung đoạn

B = diện tích đáy

Ví dụ, khi sử dụng công thức $S_{tp} = B + \frac{1}{2} Pl$

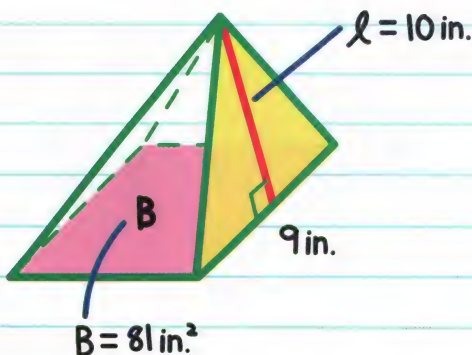
$$S_{tp} = 81 + \frac{1}{2} (9 + 9 + 9 + 9)(10)$$

$$= 81 + \frac{1}{2} (36)(10)$$

$$= 81 + \frac{1}{2} (360)$$

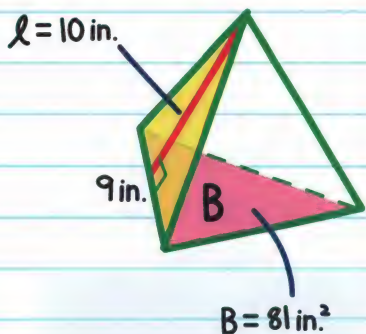
$$= 81 + 180$$

$$= 261 \text{ in}^2$$



VÍ DỤ:

Tìm diện tích toàn phần của hình chóp tam giác thông qua diện tích xung quanh.



$$S_{xq} = \frac{1}{2}Pl$$

$$= \frac{1}{2}(9 + 9 + 9)(10)$$

$$= 135$$

$$S_{xq} = 135 \text{ in}^2$$

$$S_{tp} = B + \frac{1}{2}Pl$$

$$= 81 + \frac{1}{2}(9 + 9 + 9)(10)$$

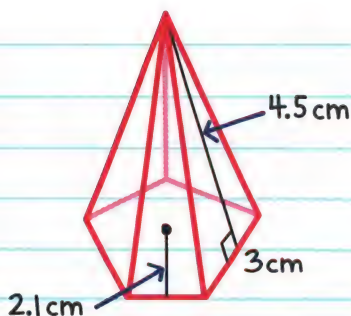
$$= 81 + 135 = 216$$

$$S_{tp} = 216 \text{ in}^2$$



VÍ DỤ: Tìm diện tích toàn phần của hình chóp ngũ giác đều.

Nếu sử dụng công thức $SA = B + \frac{1}{2}Pl$, trước tiên ta phải tìm P , chu vi của đáy, sau đó là B , diện tích của đáy.



Chu vi của đáy ngũ giác có 5 cạnh bằng nhau và bằng 3 cm là:

$$P = 5 \times 3 = 15$$

Vì đáy là ngũ giác đều nên diện tích đáy là:

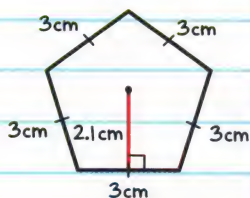
$$B = \frac{1}{2}aP$$

Diện tích của đáy là:

$$A = \frac{1}{2} \times \text{trung đoạn} \times \text{chu vi}$$

hoặc

$$A = \frac{1}{2}aP$$



Cách 1

$$B = \frac{1}{2} (2,1)(15) = 15,75$$

$$S_{tp} = B + \frac{1}{2} Pl$$

$$= 15,75 + \frac{1}{2} (15)(4,5)$$

$$= 49,5$$

$$S_{tp} = 49,5 \text{ cm}^2$$

Cách 2

Vì ta biết $B = \frac{1}{2} aP$ nên ta có thể sử dụng công thức:

$$S_{tp} = \frac{1}{2} aP + \frac{1}{2} Pl$$

$$= \frac{1}{2} (2,1)(5 \times 3) + \frac{1}{2} (5 \times 3)(4,5)$$

$$= 49,5$$

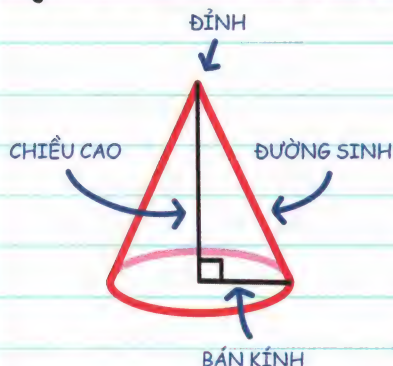
$$SA = 49,5 \text{ cm}^2$$



HÌNH NÓN

HÌNH NÓN là một hình khối có đáy là hình tròn và một đỉnh.

Hình nón không phải là hình đa diện; hình đa diện không có mặt cong.



Ta sử dụng các công thức sau để tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình nón:

DIỆN TÍCH XUNG QUANH
CỦA HÌNH NÓN

$$S_{xq} = \pi r l$$

DIỆN TÍCH TOÀN PHẦN
CỦA HÌNH NÓN

$$S_{tp} = \pi r^2 + \pi r l$$

l = chiều dài đường sinh
 r = bán kính đáy



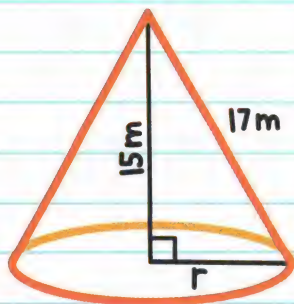
VÍ DỤ: Tìm diện tích toàn phần của hình nón.

Trước tiên ta tìm bán kính của hình nón bằng định lý Pytago.

$$r^2 + 15^2 = 17^2$$

$$r^2 = 64$$

$$r = 8$$



Sau đó, ta tìm diện tích toàn phần.

$$\begin{aligned} S_{tp} &= \pi r^2 + \pi r l \\ &= \pi(8)^2 + \pi(8)(17) \\ &= 200\pi \approx 628,3 \end{aligned}$$

Diện tích toàn phần của hình nón đã cho là $200\pi \text{ m}^2$ hoặc xấp xỉ $628,3 \text{ m}^2$.

VÍ DỤ: Indira đang trang trí những chiếc cốc hình nón bằng giấy tuyết cho bữa tiệc. Bán kính của miệng hình nón (đáy) là 1,3 inch và chiều cao là 4 inch. Hỏi diện tích xung quanh của những chiếc cốc là bao nhiêu?



Bước 1: Tìm chiều dài đường sinh bằng định lý Pytago.

$$1,3^2 + 4^2 = \ell^2$$

$$17,7 = \ell^2$$

$$\ell = 4,2 \text{ in.}$$

Bước 2: Tìm diện tích xung quanh

Ta chỉ cần tìm diện tích xung quanh vì cốc không có đáy.

$$LA = \pi r \ell$$

$$= \pi(1,3)(4,2)$$

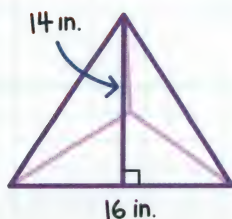
$$= 17,2 \text{ in}^2$$





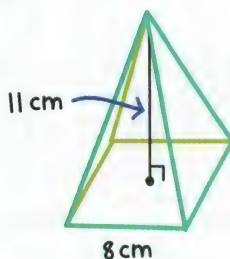
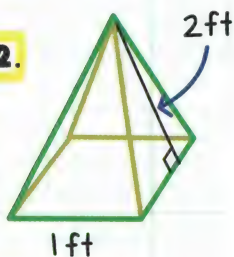
BÀI TẬP

1. Tìm diện tích xung quanh của hình chóp đều.

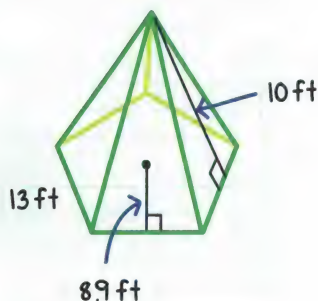
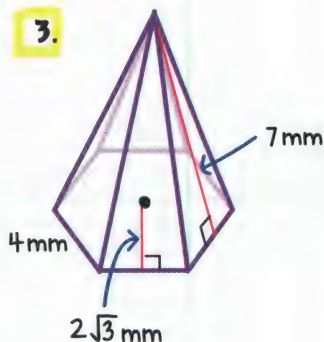


Từ câu 2-5, hãy tìm diện tích toàn phần của mỗi hình chóp đều. Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất nếu cần.

2.



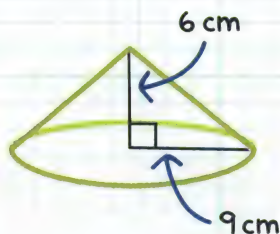
3.





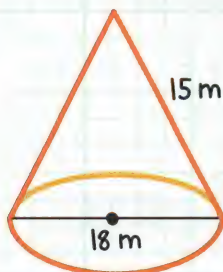
BÀI TẬP

6. Tìm diện tích xung quanh của hình nón. Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất.

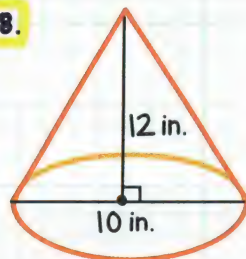


Với câu 7 và 8, tìm diện tích toàn phần của hình nón. Để nguyên kết quả chứa π .

7.



8.



9. Javier đang sơn pháo đài hình chóp vuông có chiều cao 10 foot và đáy có chiều dài các cạnh là 9 foot. Anh ấy có một nửa hộp sơn đủ để sơn 200 foot vuông. Hỏi anh ấy có đủ sơn để quét toàn bộ mặt pháo đài không?
10. Dani đang làm một cây thông nhân tạo hình nón để trang trí, cây thông bọc trong lưới. Giá lưới là 0,65 đô-la một mét vuông. Hỏi Dani tốn bao nhiêu tiền mua lưới để làm bốn cây thông cao 4 foot và có bán kính đáy bằng 1,8 foot? Làm tròn đến số thập phân thứ hai.

LỜI GIẢI



1. $\frac{1}{2} (3)(16)(14); 336 \text{ in}^2$

2. $1 + \frac{1}{2} (4)(2); 5 \text{ ft}^2$

3. $(2\sqrt{3})(24) + \frac{1}{2} (24)(7); 165,6 \text{ mm}^2$

4. $64 + \frac{1}{2} (32)(11,7)$ (ta có thể tìm trung đoạn bằng định lý Pytago: $11^2 + 4^2 = \ell^2$, $\ell = 11,7$); $251,3 \text{ cm}^2$

5. $\frac{1}{2} (8,9)(65) + \frac{1}{2} (65)(10); 614,3 \text{ ft}^2$

6. $\pi(9)(10,8)$ (Sử dụng định lý Pytago để tìm ℓ .
 $6^2 + 9^2 = \ell^2$); $305,2 \text{ cm}^2$

7. $\pi(9^2) + \pi(9)(15); 216\pi \text{ m}^2$

8. $\pi(5^2) + \pi(5)(13)$ (Sử dụng định lý Pytago để tìm ℓ .
 $12^2 + 5^2 = \ell^2$); $90\pi \text{ in}^2$

9. $\frac{1}{2} (36)(11,0)$ (Sử dụng định lý Pytago để tìm ℓ .
 $10^2 + 4,5^2 = \ell^2$); có đủ sơn, diện tích xung quanh của pháo đài là 198 ft^2

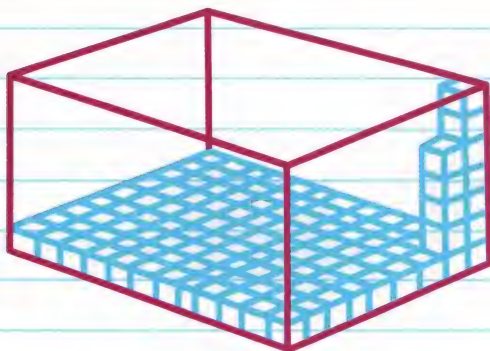
10. $\pi(1,8^2) + \pi(1,8)(4,4) = S_{\text{tp}}$; nhân với 4; nhân với 0,65 để tính ra giá tiền. (Sử dụng định lý Pytago để tìm ℓ); $91,96 \text{ đô-la}$

Chương 51

THỂ TÍCH CỦA HÌNH LĂNG TRỤ VÀ HÌNH TRỤ

THỂ TÍCH (V) của hình 3D chỉ khoảng không gian hình khối đó bao kín. Thể tích được biểu diễn bằng **ĐƠN VỊ KHỐI VUÔNG** - số các khối vuông có chiều dài cạnh bằng 1 đơn vị độ dài xếp vừa khít trong hình khối.

1 ĐƠN VỊ KHỐI VUÔNG



HÌNH LĂNG TRỤ

Để tìm thể tích của hình lăng trụ, ta dùng công thức:

$$\text{Thể tích} = \text{diện tích đáy} \times \text{chiều cao}$$
$$\text{hoặc } V = Bh$$

Sử dụng chữ cái viết hoa B để chỉ ra rằng đó là diện tích đáy.

Kết quả đo bằng đơn vị độ dài³.

Số mũ "3" nghĩa là "khối" - số khối vuông xếp vừa khít bên trong.

Hình lăng trụ chữ nhật

Để tìm **THỂ TÍCH CỦA LĂNG TRỤ CHỮ NHẬT**, ta sử dụng công thức:

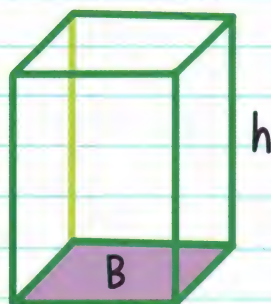
$$V = Bh$$

B = diện tích đáy
h = chiều cao

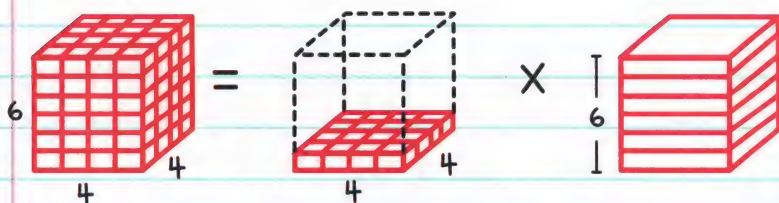
hoặc

$$V = lwh$$

l = chiều dài
w = chiều rộng
h = chiều cao



VÍ DỤ: Đây của một lăng trụ chữ nhật có 16 đơn vị khối vuông. Có 6 lớp 16 đơn vị như vậy. Hãy tìm thể tích.



$$V = B \times h$$

$$= 16 \text{ ĐƠN VỊ KHỐI VUÔNG} \times 6 \text{ LỚP}$$

$$= 96 \text{ ĐƠN VỊ KHỐI VUÔNG}$$

$$V = B \times h$$

$$= 16 \times 6$$

$$= 96 \text{ đơn vị khối vuông}$$

Đơn vị thể tích là khối

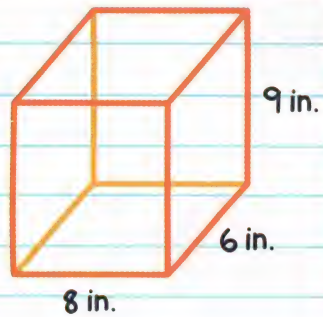
Ta cũng có thể sử dụng công thức $V = \text{chiều dài} \times \text{chiều rộng} \times \text{chiều cao}$ hoặc $V = lwh$ để tìm thể tích của lăng trụ chữ nhật.

$$V = l \times w \times h$$

$$= 4 \times 4 \times 6$$

$$= 96 \text{ đơn vị khối vuông}$$

VÍ DỤ: Hãy tìm thể tích của
lăng trụ.



Cách 1

$$B = lw$$

$$= (8)(6)$$

$$= 48$$

$$V = Bh$$

$$= (48)(9)$$

$$= 432$$

Thể tích là 432 in.^3

Cách 2

$$V = lwh$$

$$= (8)(6)(9)$$

$$= 432$$

Thể tích là 432 in.^3 .



Lăng trụ tam giác

Để tìm THỂ TÍCH CỦA LĂNG TRỤ TAM GIÁC, ta sử dụng công thức

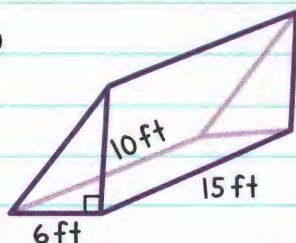
$$V = Bh \text{ hoặc}$$

$$V = \frac{1}{2} \times \text{đáy} \times \text{chiều cao} \times \text{chiều dài} \quad (V = \frac{1}{2} bhl)$$

chiều cao của tam giác

chiều dài của lăng trụ

VÍ DỤ: Tìm thể tích của lăng trụ tam giác.



Cách 1

$$B = \frac{1}{2}bh$$

$$= \frac{1}{2}(6)(10)$$

$$= 30$$

$$V = Bh$$

$$= (30)(15)$$

$$= 450$$

Thể tích là 450 ft³

Cách 2

$$V = \frac{1}{2}bhl$$

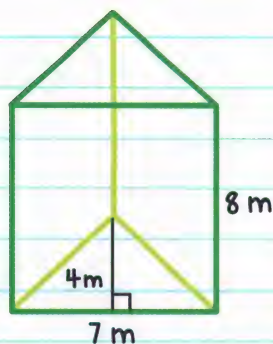
$$= \frac{1}{2}(6)(10)(15)$$

$$= 450$$

Thể tích là 450 ft³.

VÍ DỤ: Tìm thể tích của hình lăng trụ tam giác.

Nhân diện tích của đáy ($B = \frac{1}{2} \times 7 \times 4$) với chiều cao của lăng trụ ($h = 8$).



$$V = Bh$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times 7 \times 4\right)(8)$$

$$= 112$$

Ví dụ này sử dụng h là chiều cao của tam giác còn l là chiều cao của lăng trụ.

Thể tích cần tìm là 112 m^3 .

Thể tích của hình trụ

Công thức tính thể tích hình trụ là diện tích đáy nhân chiều cao:

$$V = Bh$$

Vì đáy là hình tròn nên ta có thể sử dụng công thức tính diện tích hình tròn ($A = \pi r^2$) để tìm diện tích đáy.

$$V = \pi \times \text{bán kính}^2 \times \text{chiều cao} (\pi r^2 h)$$

diện tích của đáy

$$V = Bh$$

$$= \pi r^2 h$$

B = diện tích đáy

r = bán kính đáy

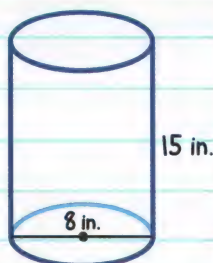
h = chiều cao

VÍ DỤ: Tìm thể tích của hình trụ.

$$V = \pi r^2 h$$

$$= \pi (4)^2 (15)$$

$$= 240\pi \text{ in.}^3 \approx 754,0 \text{ in.}^3$$



Hình lăng trụ xiên và hình trụ xiên

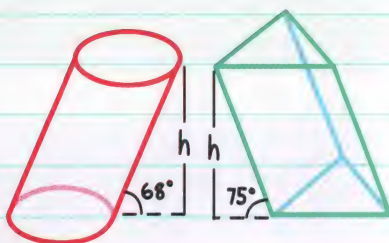
HÌNH LĂNG TRỤ XIÊN và HÌNH TRỤ XIÊN không có góc vuông giữa các cạnh với đáy.

Thể tích của hình

lăng trụ xiên được tính từ

thể tích của lăng trụ thường

(có chứa góc vuông)



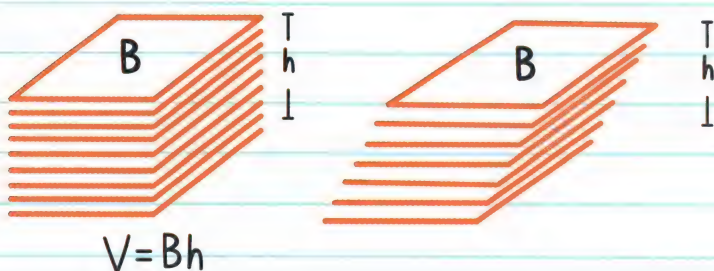
XIÊN

nghĩa là nghiêng, không song song hoặc không vuông góc

Một chồng giấy giống như một lăng trụ chữ nhật có thể tích là $V = Bh$.

Hãy tưởng tượng cũng chồng giấy đó nghiêng đi một chút.

Chiều cao của chồng giấy không thay đổi. Thể tích của khối giấy cũng không thay đổi. Chỉ có hướng thay đổi.



Vậy thể tích của lăng trụ xiên giống như lăng trụ vuông góc có cùng đáy và chiều cao, $V = Bh$.

NGUYÊN LÝ CAVALIERI

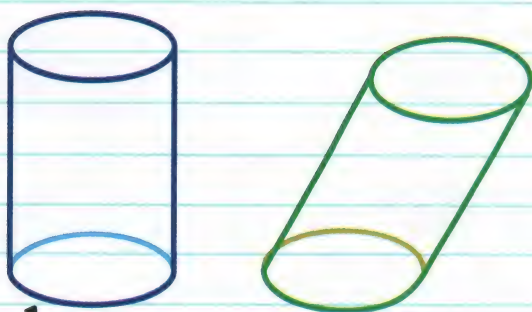
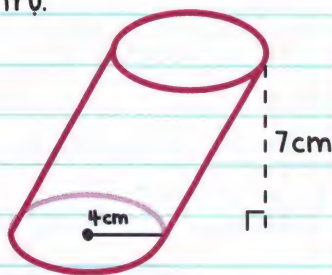
Bonaventura Francesco Cavalieri
(1598 - 1647; nhà toán học người Ý)

Nếu hai hình khối có cùng chiều cao và cùng diện tích mặt cắt tại mọi vị trí tương ứng (giống như diện tích của một tờ giấy) thì chúng có thể tích bằng nhau.

Nguyên lý Cavalieri cũng có thể sử dụng để chứng minh thể tích của một hình trụ xiên giống với thể tích của hình trụ đứng, $V = \pi r^2 h$.

VÍ DỤ: Tìm thể tích của hình trụ.

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 h \\ &= \pi (4)^2 (7) = 112\pi \\ V &= 112\pi \text{ in.}^3 \end{aligned}$$



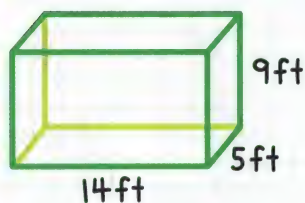
CÔNG THỨC TÍNH
THỂ TÍCH GIỐNG NHAU



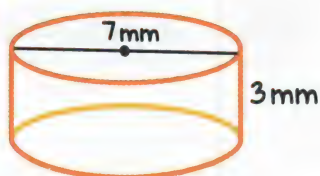
BÀI TẬP

Từ câu 1-8, hãy tìm thể tích của hình lăng trụ hoặc hình trụ đã cho.

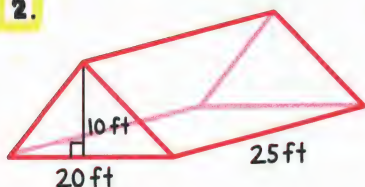
1.



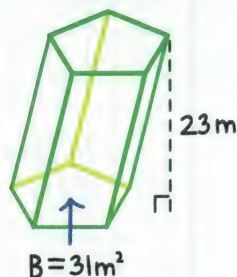
5.



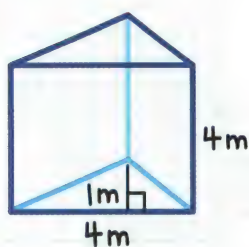
2.



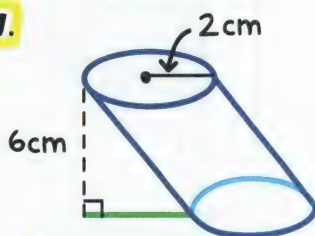
6.



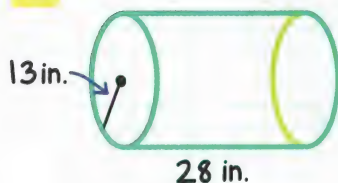
3.



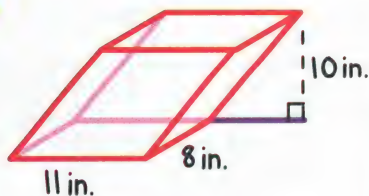
7.



4.

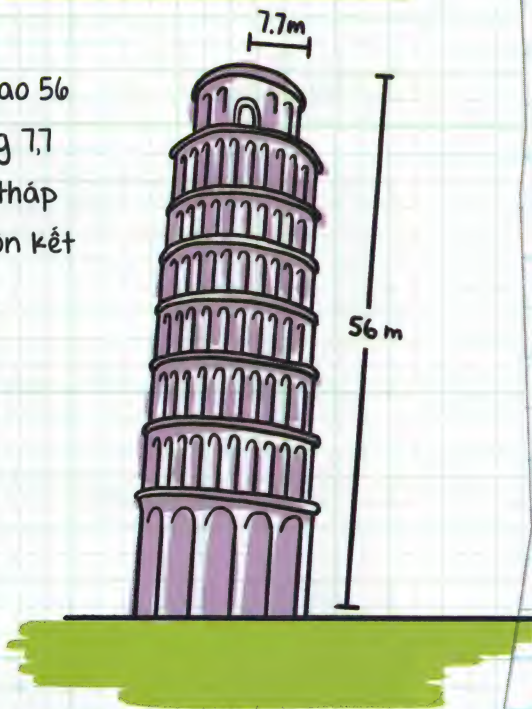


8.



BÀI TẬP

9. Tháp nghiêng Pisa cao 56 mét, có bán kính bằng 7,7 mét. Hỏi thể tích của tháp là bao nhiêu? Làm tròn kết quả tới mét khối.



10. Một hộp của công ty nước ép hoa quả có kích thước như trong hình vẽ đã cho. Hỏi thể tích của một hộp là bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất.



LỜI GIẢI



1. $14(5)(9)$; 630 ft^3

2. $\frac{1}{2}(20)(10)(25)$; 2.500 ft^3

3. $\frac{1}{2}(4)(1)(4)$; 8 m^3

4. $\pi(13^2)(28)$; $4732\pi \text{ in.}^3 \approx 14.858,1 \text{ in.}^3$

5. $\pi(3,5^2)(3)$; $36,75\pi \text{ mm}^3 \approx 115,4 \text{ mm}^3$

6. $31(23)$; 713 m^3

7. $\pi(2^2)(6)$; $24\pi \text{ cm}^3 \approx 75,4 \text{ cm}^3$

8. $11(8)(10)$; 880 in.^3

9. $\pi(7,7^2)(56)$; 10.426 m^3

10. $\pi(1,5^2)(4,8)$; $33,9 \text{ in.}^3$

Chương 52

THỂ TÍCH CỦA HÌNH CHÓP VÀ HÌNH NÓN

THỂ TÍCH CỦA HÌNH CHÓP

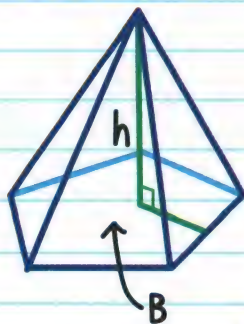
Để tính thể tích của hình chóp, ta nhân một phần ba diện tích đáy với chiều cao.

Công thức để tính thể tích của hình chóp là:

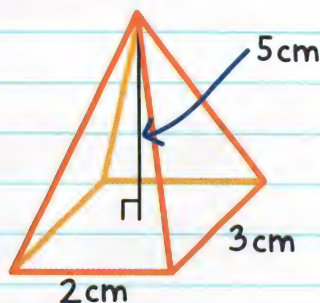
$$V = \frac{1}{3} \times \text{diện tích đáy} \times \text{chiều cao}$$

hoặc

$$V = \frac{1}{3} Bh$$



VÍ DỤ: Tìm thể tích của hình chóp.



Cách 1

Trước tiên, tìm giá trị của B, diện tích đáy
 $B = lw$ (chiều dài \times chiều rộng)

$$= 2 \times 3$$

$$= 6 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3} Bh$$

$$= \frac{1}{3} (6)(5) = 10$$

$$V = 10 \text{ cm}^3$$

Cách 2

$B = lw$, ta có thể sử dụng công thức $V = \frac{1}{3} lwh$

$$V = \frac{1}{3} lwh$$

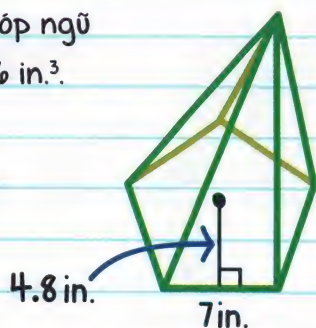
$$= \frac{1}{3} (2)(3)(5)$$

$$V = 10 \text{ cm}^3$$

VÍ DỤ: Tìm chiều cao của chóp ngũ giác đều có thể tích bằng $453,6 \text{ in.}^3$.

Bước 1: Tìm diện tích của đáy.

Vì đáy là ngũ giác đều nên diện tích của đáy là:



$$B = \frac{1}{2} aP$$

$$= \frac{1}{2} (4,8)(35)$$

$$= 84$$

Bước 2: Tìm chiều cao.

$$V = \frac{1}{3} Bh$$

$$453,6 = \frac{1}{3} (84)h$$

$$h = 16,2$$

Chiều cao là 16,2 in.

THỂ TÍCH CỦA HÌNH NÓN

Để tính thể tích của hình nón ta sử dụng công thức:

Thể tích = $\frac{1}{3}$ diện tích đáy x chiều cao

$$V = \frac{1}{3} \text{đáy} \times \text{chiều cao}$$

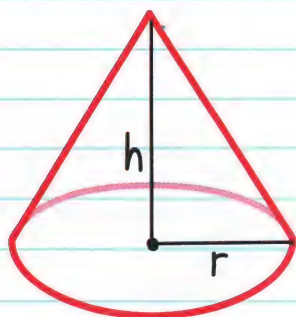
hoặc

$$V = \frac{1}{3} Bh$$

Vì đáy của hình nón là hình tròn nên có diện tích πr^2 , công thức này sẽ trở thành:

Thể tích = $\frac{1}{3} \times \pi \times \text{bán kính}^2 \times \text{chiều cao}$:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$



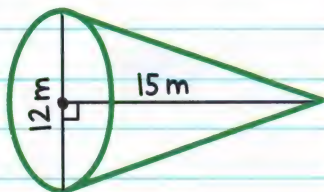
VÍ DỤ: Tìm thể tích của hình nón.

Vì bán kính bằng nửa độ dài đường kính nên $r = 6$.

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3} \pi (6)^2 (15)$$

$$= 180\pi \approx 565,5$$



Thể tích của hình nón là $180\pi \text{ m}^3$
hoặc xấp xỉ $565,5 \text{ m}^3$.

VÍ DỤ: June có một gói hình nón chứa đầy bỏng ngô. Hãy tìm thể tích của hình nón.

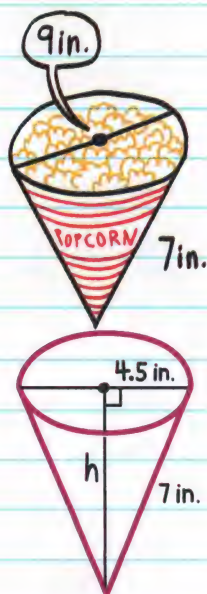
Vì ta có thể sử dụng công thức

$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ nên ta cần tìm chiều cao của gói, h , bằng định lý Pytago.

$$h^2 + 4,5^2 = 7^2$$

$$h^2 = 28,75$$

$$h \approx 5,36 \text{ in.}$$



Bây giờ ta đã có đủ thông tin để tìm thể tích.

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3} \pi (4,5)^2 (5,36)$$

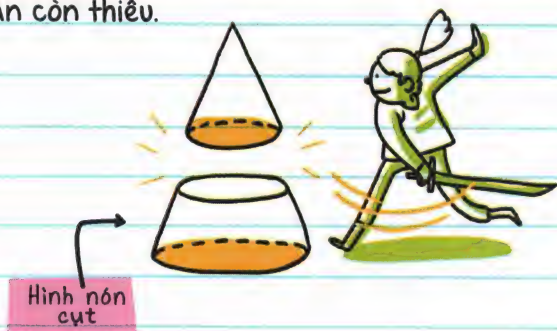
$$\approx 113,7$$

Thể tích của hình nón là xấp xỉ $113,7 \text{ in.}^3$.

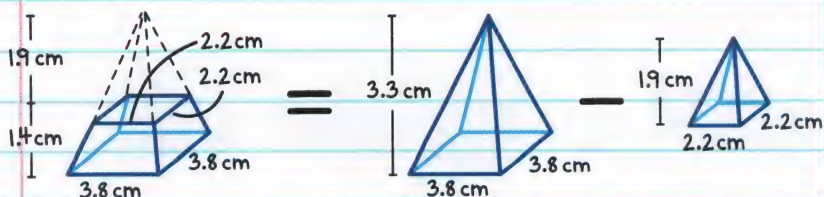
Thể tích của hình chóp cắt, hình nón cắt

HÌNH CỤT là một phần của hình chóp hoặc hình nón còn lại khi ta cắt đi phần chóp của nó theo một mặt phẳng song song với đáy.

Ta tìm thể tích của một hình chóp cắt, hình nón cắt bằng cách trừ thể tích của toàn bộ khối hình cho thể tích của phần còn thiếu.



VÍ DỤ: Tìm thể tích của hình chóp cắt.



Thể tích của hình cắt = Thể tích của hình đủ - Thể tích của phần thiếu

$$= \frac{1}{3} Bh - \frac{1}{3} Bh$$

$$= \frac{1}{3} lwh - \frac{1}{3} lwh$$

$$= \frac{1}{3} (3,8 \times 3,8)(3,3) - \frac{1}{3} (2,2 \times 2,2)(1,9)$$

$$= 15,884 - 3,065$$

$$= 12,82$$

công thức
tính thể tích
hình chóp

Thể tích của hình chóp cắt là $12,82 \text{ cm}^3$.

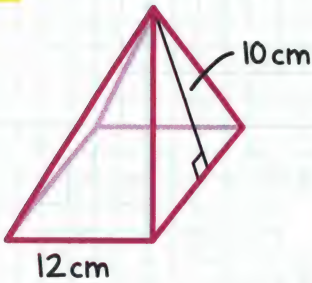




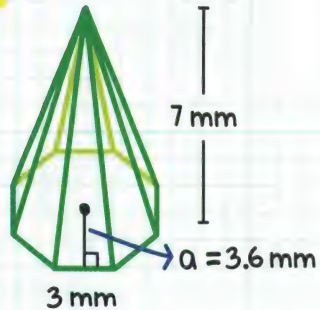
BÀI TẬP

Với câu 1 và 2, hãy tìm thể tích của mỗi hình chóp đều đã cho. Làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất nếu cần.

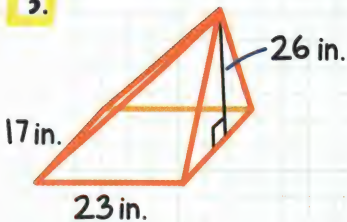
1.



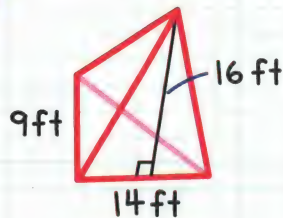
2.



3.



4.

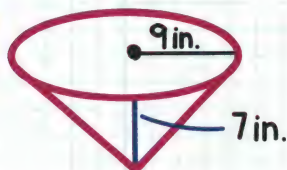




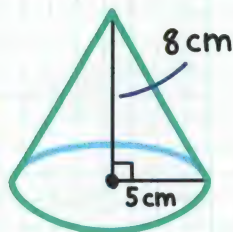
BÀI TẬP

Với câu 5-7, hãy tìm thể tích của hình nón. Làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất nếu cần.

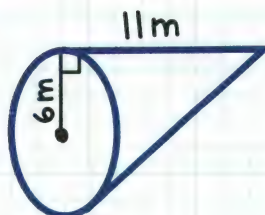
5.



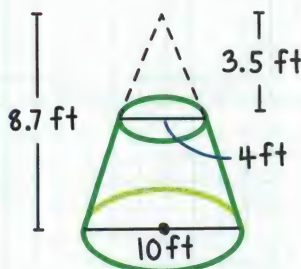
7.



6.



8. Tìm thể tích của hình nón cụt.



9. Tìm chiều cao của hình chóp có thể tích bằng 72 in^3 và diện tích đáy bằng 36 in^2 .

10. Tìm bán kính của hình nón có thể tích 147 m^3 và chiều cao 9 m . Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất.

LỜI GIẢI



1. $\frac{1}{3} (12)(12)(8)$; 384 cm^3

2. $\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right) (3.6)(24)(7)$; 100.8 mm^3

3. $\frac{1}{3} (23)(17)(26)$; $3,388.7 \text{ in.}^3$

4. $\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right) (14)(9)(16)$; 336 ft^3

5. $\frac{1}{3} \pi (9^2)(7)$; 593.5 in.^3

6. $\frac{1}{3} \pi (6^2)(11)$; 414.5 m^3

7. $\frac{1}{3} \pi (5^2)(8)$; 209.3 cm^3

8. $\frac{1}{3} \pi (5^2)(8.7) - \frac{1}{3} \pi (2^2)(3.5)$; 213.1 ft^3

9. $72 = \frac{1}{3} (36)h$; 6 in.

10. $147 = \frac{1}{3} \pi r^2(9)$; 3.9 m

Chương 53

DIỆN TÍCH MẶT CẦU VÀ THỂ TÍCH HÌNH CẦU

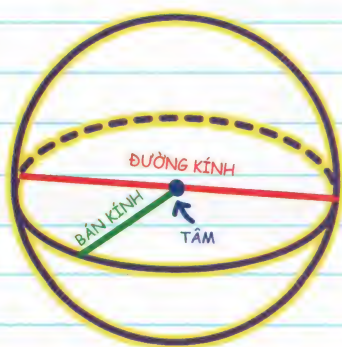
MẶT CẦU là tập hợp các điểm trong không gian cách đều một điểm tâm, giống như một quả bóng.

khoảng cách bằng nhau

Tất cả các đường nối từ tâm của mặt cầu tới mặt cầu đều là bán kính.

Bán kính của mặt cầu là một đoạn thẳng nối từ tâm đến một điểm trên mặt cầu.

Đường kính của mặt cầu là đoạn thẳng đi qua tâm và có cả hai đầu mút nằm trên mặt cầu.

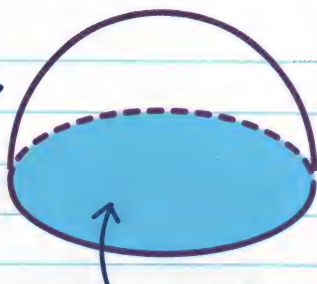


BÁN CẦU là một nửa mặt cầu.

bán cầu →

Đường tròn chia mặt cầu thành hai bán cầu gọi là **ĐƯỜNG**

TRÒN LỚN.



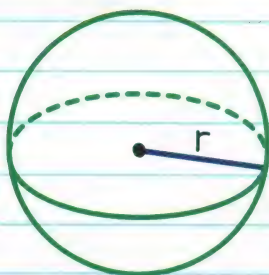
ĐƯỜNG TRÒN LỚN

DIỆN TÍCH MẶT CẦU

Để tính diện tích mặt cầu ta sử dụng công thức sau:

$$S = 4\pi r^2$$

r = bán kính của mặt cầu



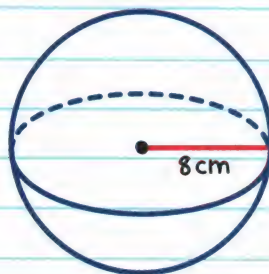
VÍ DỤ: Tìm diện tích của mặt cầu.

$$S = 4\pi r^2$$

$$= 4\pi(8)^2$$

$$= 256\pi \approx 804,2$$

$$S = 256\pi \text{ cm}^2 \text{ hoặc xấp xỉ } 804,2 \text{ cm}^2$$



VÍ DỤ: Tìm diện tích của mặt cầu có chu vi đường tròn lớn bằng $65\pi \text{ in}^2$.

Trước khi sử dụng công thức $S = 4\pi r^2$, ta phải tìm bán kính. Ta sẽ tìm bán kính dựa vào đường tròn lớn, vì nó có cùng bán kính với mặt cầu.

Vi chu vi của đường tròn lớn là $65\pi \text{ in}^2$ nên ta có:

$$C = 2\pi r$$

$$65\pi = 2\pi r$$

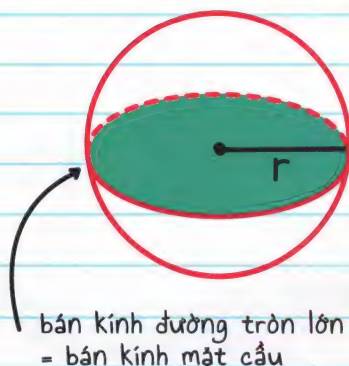
$$r = 32.5 \text{ in.}$$

$$SA = 4\pi r^2$$

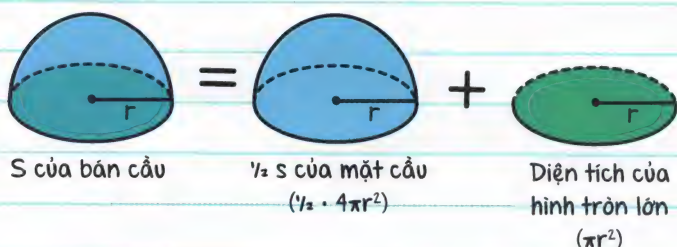
$$= 4\pi(32.5)^2$$

$$= 4225\pi$$

Diện tích của mặt cầu là $4225\pi \text{ in}^2$.



DIỆN TÍCH BÁN CẦU là một nửa diện tích mặt cầu cộng với diện tích của hình tròn lớn.



$$SA = \frac{1}{2} (4\pi r^2) + \pi r^2$$

VÍ DỤ: Hiro nướng bánh quy trong các khuôn hình bán cầu. Mỗi chiếc bánh có bán kính 3 cm. Hiro sẽ phết sô cô la kín hết mỗi chiếc bánh. Anh ấy có đủ sô cô la để phết lên một diện tích 2.000 cm². Hỏi Hiro sẽ phết được sô cô la lên bao nhiêu chiếc bánh quy?



Diện tích mặt ngoài mỗi chiếc bánh quy là:

$$\begin{aligned} SA &= \frac{1}{2} (4\pi r^2) + \pi r^2 \\ &= \frac{1}{2} [4\pi(3)^2] + \pi(3)^2 \\ &= 27\pi \text{ cm}^2 \end{aligned}$$



Số chiếc bánh Hiro có thể phết sô cô la là:

$$\frac{\text{Tổng } S}{S \text{ mỗi chiếc bánh quy}} = \frac{2,000}{27\pi} \approx 23,6$$

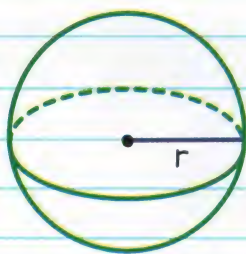
Hiro có thể phết sô cô la được 23 chiếc bánh.

THỂ TÍCH HÌNH CẦU

Để tính thể tích của hình cầu
ta sử dụng công thức sau:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

r = bán kính của hình cầu

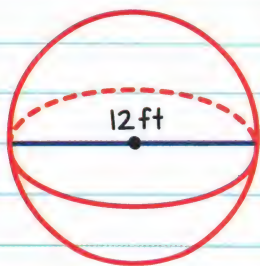


ĐỂ TÍNH THỂ TÍCH,
TA CHỈ CẦN BIẾT
BÁN KÍNH



VÍ DỤ: Tìm thể tích của hình cầu.

Bán kính bằng nửa đường kính
nên $r = 6$ ft.



$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$= \frac{4}{3} \pi (6 \text{ ft})^3$$

$$= 288\pi \text{ ft}^3$$

VÍ DỤ: Tìm thể tích của quả bóng có diện tích mặt ngoài bằng $100\pi \text{ inch}^2$.

Trước tiên ta tìm bán kính của quả bóng bằng công thức tính diện tích:

$$S = 4\pi r^2$$

$$100\pi = 4\pi r^2$$

$$r^2 = \frac{100\pi}{4\pi}$$

$$r^2 = 25$$

$$r = 5$$

Bán kính là 5 inch.

Sau đó ta tìm thể tích:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$= \frac{4}{3} \pi (5)^3$$

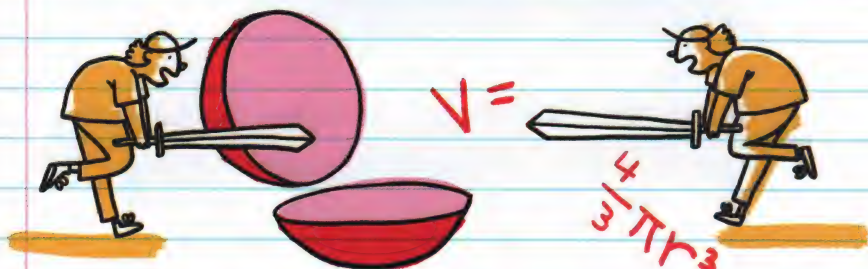
$$= \frac{500}{3} \pi \approx 523,6$$

Thể tích của quả bóng xấp xỉ $523,6 \text{ in}^3$.

Thể tích của hình bán cầu là một nửa thể tích của hình cầu. Công thức là:

$$V = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi r^3$$

MỘT NỬA HÌNH;
MỘT NỬA CÔNG THỨC

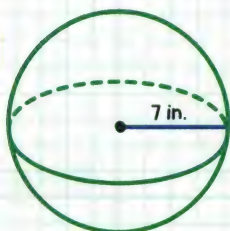




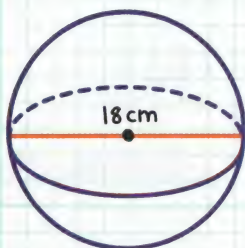
BÀI TẬP

Với các câu 1-3, hãy tìm diện tích của mỗi mặt cầu hoặc bán cầu. Để nguyên kết quả chứa pi.

1.



2.



3.

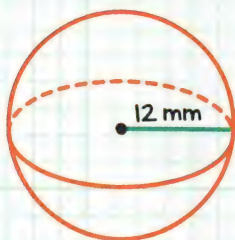


4. Tìm diện tích mặt cầu có chu vi đường tròn lớn bằng 20 mét. Làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất
5. Tìm diện tích bán cầu có diện tích hình tròn lớn bằng $\pi \text{ ft}^2$. Để nguyên kết quả chứa pi.
6. Tìm thể tích của hình cầu có diện tích mặt cầu bằng $31\pi \text{ m}$. Làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất

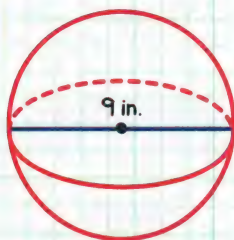
BÀI TẬP

Từ câu 7-9, tìm thể tích của mỗi hình cầu hay bán cầu. Để nguyên kết quả chứa pi.

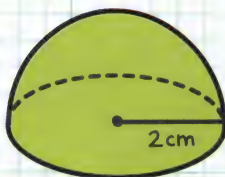
7.



8.



8.



10. Tìm thể tích của hình bán cầu có chu vi đường tròn lớn bằng 45 foot. Làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất.

11. Thép nặng 0,2904 pound trên mỗi inch^3 . Hỏi một quả cầu thép có đường kính 6 inch nặng bao nhiêu? Làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất.

12. Nicole tập thể dục với hai miếng bóng dụng cụ rỗng hình bán cầu. Đáy của bóng có diện tích bằng $169\pi \text{ in}^2$. Hỏi thể tích của phần không khí phía trong quả bóng là bao nhiêu nếu làm tròn đến số thập phân thứ nhất?

LỜI GIẢI



1. $4\pi(7^2)$; $196\pi \text{ in}^2$

2. $4\pi(9^2)$; $324\pi \text{ cm}^2$

3. $\frac{1}{2}(4)\pi(4^2) + \pi(4^2)$; $48\pi \text{ ft}^2$

4. $4\pi(3,2^2)$; $127,3 \text{ m}^2$

5. $\frac{1}{2}(4)\pi(1^2) + \pi(1^2)$; $3\pi \text{ ft}^2$

6. $\frac{4}{3}\pi(2,8^3)$; $91,9 \text{ m}^3$

7. $\frac{4}{3}\pi(12^3)$; $2.304\pi \text{ mm}^3$

8. $(\frac{4}{3}\pi(4,5^3))$; $\frac{243}{2}\pi = 121,5\pi \text{ in}^3$

9. $\frac{1}{2}(\frac{4}{3}\pi(2^3))$; $\frac{16}{3}\pi \text{ cm}^3$

10. $\frac{1}{2}(\frac{4}{3}\pi(7,2^3))$; $781,3 \text{ ft}^3$

11. $0,2904(\frac{4}{3}\pi(3^3))$; $32,8 \text{ lbs}$

12. Diện tích của đáy = πr^2 ; $169\pi = \pi r^2$; $r^2 = 169$; $r = 13$
 $V = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi(13^3) = 4.599,1 \text{ in}^3$

Chương 54

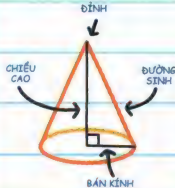
THỂ TÍCH CỦA HÌNH TỔNG HỢP

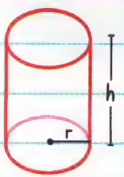

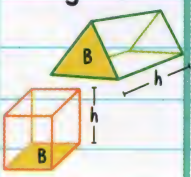
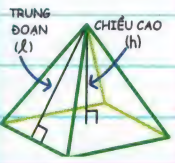

HÌNH 3D TỔNG HỢP là một hình tạo bởi hai hoặc nhiều hình khối cơ bản trong hình học.

Ta có thể chia một hình tổng hợp thành các hình khối cơ bản trong hình học để tính toán.

Công thức dùng để tính thể tích của hình 3D tổng hợp::

P = chu vi của đáy
 B = diện tích của đáy
 r = bán kính của đáy
 h = chiều cao
 l = trung đoạn

TÊN HÌNH	DIỆN TÍCH XUNG QUANH	DIỆN TÍCH TOÀN PHẦN	THỂ TÍCH
Hình nón 	$\pi r l$	$B + \pi r l$ hoặc $\pi r^2 + \pi r l$	$\frac{1}{3} B h$ hoặc $\frac{1}{3} \pi r^2 h$

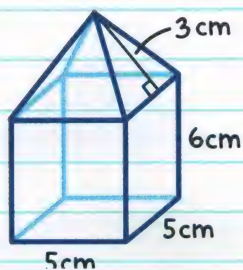
TÊN HÌNH	DIỆN TÍCH XUNG QUANH	DIỆN TÍCH TOÀN PHẦN	THỂ TÍCH
Hình trụ 	$2\pi rh$	$2B + 2\pi rh$ hoặc $2\pi r^2 + 2\pi rh$	Bh hoặc $\pi r^2 h$
Bán cầu 		$\frac{1}{2}(4\pi r^2) + \pi r^2$	$\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$
Hình lăng trụ 	Ph	$2B + Ph$	Bh
Hình chóp 	$\frac{1}{2}Pl$	$B + \frac{1}{2}Pl$	$\frac{1}{3}Bh$
Hình cầu 		$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$

DIỆN TÍCH XUNG QUANH, DIỆN TÍCH TOÀN PHẦN CỦA HÌNH TỔNG HỢP

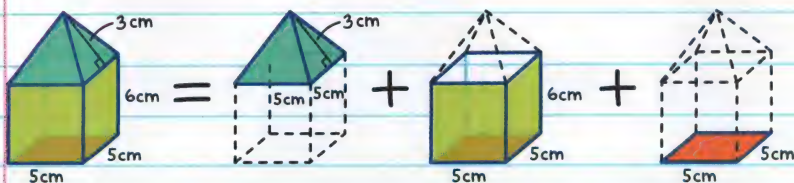
Diện tích toàn phần của hình tổng hợp là diện tích bao quanh toàn bộ phía ngoài của khối hình. Để tìm diện tích toàn phần ta cộng diện tích các mặt ngoài lại với nhau, bao gồm cả các mặt cong (chỉ những phần bên ngoài).

VÍ DỤ: Tìm diện tích toàn phần của hình tổng hợp đã cho.

Những phần diện tích xung quanh của hình chóp, diện tích xung quanh của lăng trụ và phần đáy của hình tổng hợp cũng là đáy của hình lăng trụ.



Không bao gồm đáy trên của hình lăng trụ (cũng là đáy của hình chóp) vì nó không phải là mặt ngoài của hình đã cho.



Tổng diện tích toàn phần = $\frac{\text{diện tích xung quanh của hình chóp}}{\text{diện tích xung quanh của lăng trụ}} + \text{diện tích một đáy của lăng trụ}$

$$= \frac{1}{2}Pl + Ph + lw$$

$$= \frac{1}{2}(5 + 5 + 5 + 5)(3) + (5 + 5 + 5 + 5)(6) + 5 \times 5$$

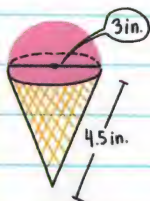
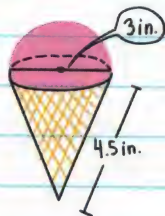
$$= 30 + 120 + 25$$

$$= 175$$

Diện tích toàn phần của hình đã cho là 175 cm^2

VÍ DỤ: Tìm diện tích toàn phần của chiếc kem cốc và viên kem.

Tách hình khối thành hình nón và hình bán cầu.



=



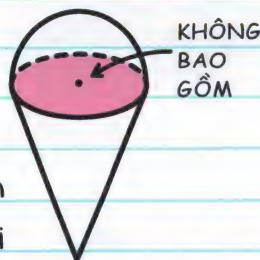
+



$$\begin{aligned}
 \text{Tổng diện tích toàn phần} &= \text{diện tích xung quanh của hình nón} + \frac{1}{2} \text{ diện tích toàn phần của mặt cầu} \\
 &= \pi r l + \frac{1}{2} (4\pi r^2) \\
 &= \pi(1,5)(4,5) + \frac{1}{2} [4\pi(1,5)^2] \\
 &\approx 35,3
 \end{aligned}$$

Diện tích toàn phần của cốc kem và viên kem là xấp xỉ $35,3 \text{ in}^2$.

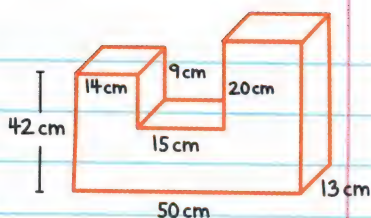
Chú ý: Với hình bán cầu, ta chỉ sử dụng một nửa diện tích toàn phần của mặt cầu thay vì diện tích bán cầu cộng với diện tích đường tròn lớn (phần này không nằm trên mặt ngoài của hình tổng hợp nên không thuộc phần diện tích toàn phần cần tìm)



THỂ TÍCH CỦA HÌNH TỔNG HỢP

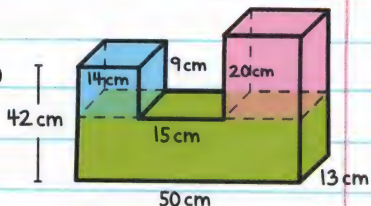
Để tìm thể tích của hình tổng hợp, ta tách hình thành các khối hình cơ bản. Sau đó ta sử dụng các công thức đã biết để tìm thể tích của mỗi hình thành phần. Cuối cùng ta cộng tất cả các thể tích thành phần lại.

VÍ DỤ: Tìm thể tích của hình tổng hợp đã cho.



Tách hình đã cho thành ba hình lăng trụ.

Vì thể tích của mỗi hình lăng trụ là $V = lwh$ nên ta tìm các chiều dài, chiều rộng, chiều cao còn thiếu của mỗi hình thành phần.

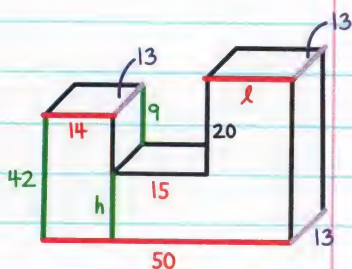


Sử dụng độ dài các đoạn nằm ngang để tìm chiều dài của hình lăng trụ đỏ.

$$l = 50 - 14 - 15 = 21$$

Sử dụng chiều cao toàn bộ hình để tìm chiều cao của hình lăng trụ màu xanh lá cây:

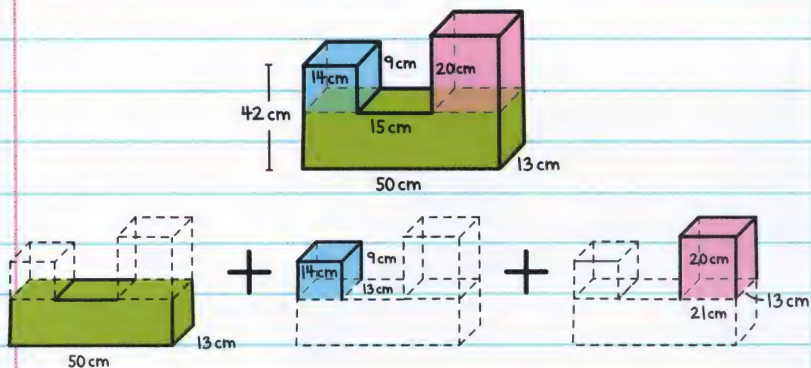
$$h = 42 - 9 = 33$$



Chiều rộng của toàn bộ hình chính là chiều rộng của tất cả ba hình lăng trụ:

$$w = 13$$

Bây giờ ta đã có đủ thông tin để tìm thể tích.



Tổng thể tích = thể tích của hình lăng trụ màu xanh lá cây + thể tích của hình lăng trụ màu xanh nước biển + thể tích của hình lăng trụ màu đỏ

$$= lwh + lwh + lwh$$

$$= (50)(13)(33) + (14)(13)(9) + (21)(13)(20)$$

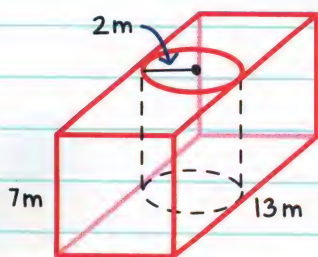
$$= 28.548$$

Thể tích cần tìm là 28.548 cm³.

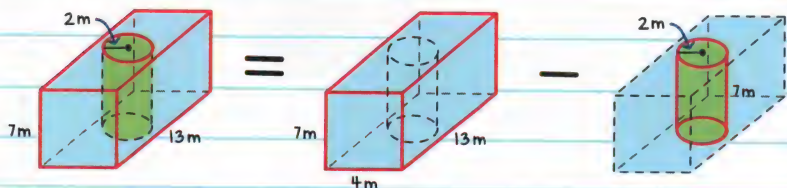


VÍ DỤ: Tìm thể tích của khối hình đã cho..

Nếu ta trừ thể tích của hình lăng trụ chữ nhật cho thể tích của hình trụ ta sẽ được thể tích của hình còn lại.



Chiều dài của hình lăng trụ là đường kính của hình trụ,
 $l = 2\text{ m} + 2\text{ m} = 4\text{ m}$



Tổng thể tích = thể tích của hình lăng trụ - thể tích của hình trụ

$$\begin{aligned} &= lwh - \pi r^2 h \\ &= (4)(13)(7) - \pi(2)^2(7) \\ &= 364 - 28\pi \\ &\approx 276,0 \end{aligned}$$

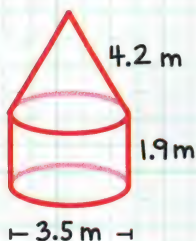
Thể tích cần tìm là xấp xỉ $276,0\text{ m}^3$



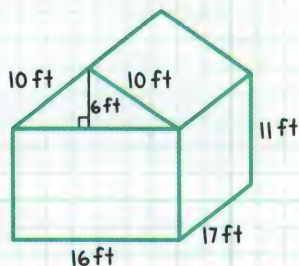
BÀI TẬP

Với các câu 1 và 2, hãy tìm diện tích toàn phần của mỗi hình tổng hợp đã cho. Làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất nếu cần.

1.

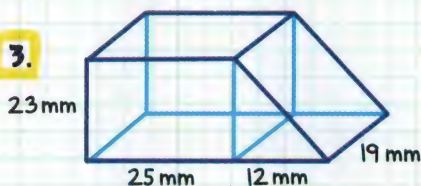


2.

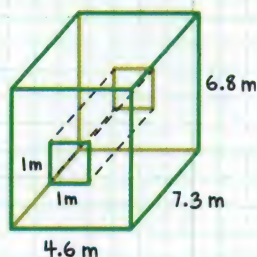


Với các câu từ 3-6, hãy tìm diện tích toàn phần của mỗi hình tổng hợp đã cho. Làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất nếu cần.

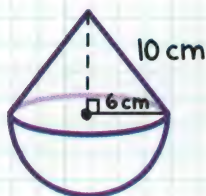
3.



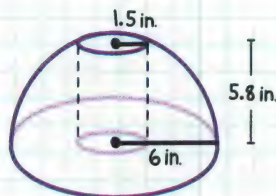
5.



4.



6.



LỜI GIẢI



1. $2\pi(1,75)(1,9) + \pi(1,75^2) + \pi(1,75)(4,2); 53,6 \text{ m}^2$

2. $2\left(\frac{1}{2}\right)(16)(6) + 2(10)(17) + 2(17)(11) + 2(16)(11) + 16(17); 1.434 \text{ ft}^2$

3. $23(25)(19) + \frac{1}{2}(12)(23)(19); 13.547 \text{ mm}^3$

4. $\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{3}\right)\pi(6^3) + \frac{1}{3}\pi(6^2)(8); 754,0 \text{ cm}^3$

5. $4,6(7,3)(6,8) - 1(1)(7,3); 221,0 \text{ m}^3$

6. $\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{3}\right)\pi(6^3) - \pi(1,5^2)(5,8); 411,2 \text{ in.}^3$

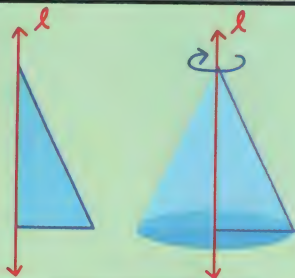
Chương 55

KHỐI TRÒN XOAY

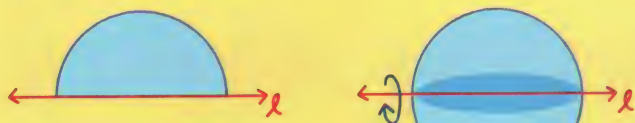
KHỐI TRÒN XOAY là hình khối tạo thành khi ta quay một vật hai chiều quanh một đường thẳng, gọi là **TRỤC**.

Ví dụ về khối tròn xoay:

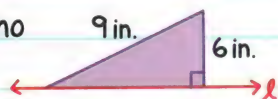
Quay hình tam giác (2D)
quanh đường thẳng ℓ tạo
thành hình nón (3D)



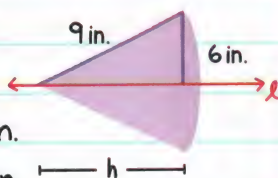
Quay hình bán nguyệt (2D) quanh trục ℓ tạo thành hình cầu (3D).



VÍ DỤ: Tìm thể tích của hình khối tạo thành khi quay tam giác đã cho quanh trục ℓ .



Hình khối tạo thành là một hình nón.
Cạnh huyền của tam giác trở thành đường sinh của hình nón, vậy $\ell = 9$ in.
Cạnh 6 in của tam giác trở thành bán kính của đáy hình nón, vậy $r = 6$ in.



Để sử dụng công thức tính thể tích hình nón, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, trước tiên ta sử dụng định lý Pytago để tìm chiều cao của hình nón.

$$h^2 + r^2 = \ell^2$$

$$h^2 + 6^2 = 9^2$$

$$h^2 + 36 = 81$$

$$h^2 = 45$$

$$h = \sqrt{45} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

Sau đó thay các kết quả vừa tìm được vào công thức:

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3} \pi r^2 h \\&= \frac{1}{3} \pi (6)^2 (3\sqrt{5}) \\&= 36\sqrt{5} \pi\end{aligned}$$

Thể tích của hình nón là $36\sqrt{5} \pi \text{ in}^3$.

VÍ DỤ: Tìm thể tích của hình khối tạo thành khi quay hình chữ nhật đã cho quanh trục ℓ .

Hình khối tạo thành là một hình trụ.

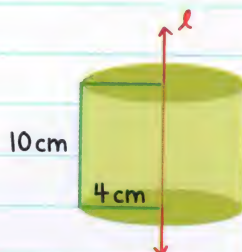
Cạnh 10 cm của hình chữ nhật trở thành chiều cao của hình trụ.

Cạnh 4 cm của hình chữ nhật trở thành bán kính của đáy hình trụ.

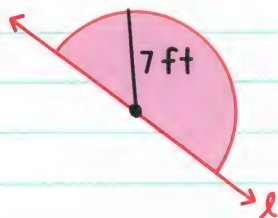
Thể tích là:

$$\begin{aligned}V &= \pi r^2 h \\&= \pi (4)^2 (10) \\&= 160\pi\end{aligned}$$

Thể tích của hình trụ là $160\pi \text{ cm}^3$.



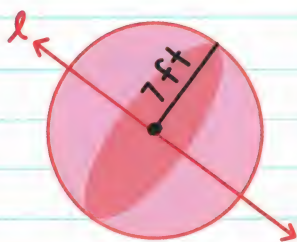
VÍ DỤ: Tìm diện tích toàn phần của hình khối tạo thành khi quay hình bán nguyệt đã cho quanh trục l .



Hình khối tạo thành là một hình cầu có bán kính bằng 7 foot.

Diện tích toàn phần là:

$$\begin{aligned} S &= 4\pi r^2 \\ &= 4\pi(7)^2 \\ &= 196\pi \end{aligned}$$



Diện tích toàn phần cần tìm là $196\pi \text{ ft}^2$.

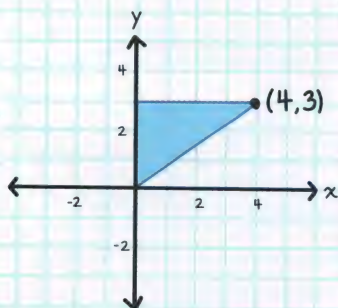
HÌNH TRÒN XOAY TRÊN MẶT PHẪNG TỌA ĐỘ

Một hình hai chiều quay quanh trục hoành hoặc trục tung (hoặc một đường thẳng khác trên mặt phẳng) đều tạo thành một vật thể ba chiều.

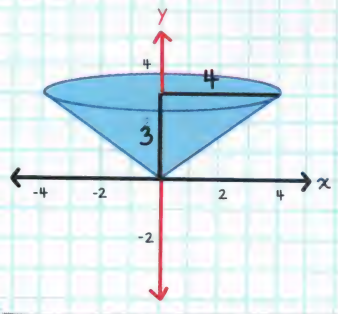
Quay một hình quanh trục tung là quay ngang (từ trái sang phải). Quay một hình quanh trục hoành là quay dọc (từ trên xuống dưới).

VÍ DỤ: Tìm diện tích toàn phần của hình tạo thành khi tam giác quay quanh trục tung.

Hình khối tạo thành là hình nón có chiều cao 3 đơn vị độ dài và bán kính đáy bằng 4 đơn vị độ dài.



Để sử dụng công thức diện tích toàn phần cho hình nón, $S_{tp} = \pi r^2 + \pi r l$, ta phải tìm đường sinh l .



Vì cạnh huyền của tam giác trở thành đường sinh nên ta có thể sử dụng bộ ba số Pytago để tìm đường sinh, $l = 5$.

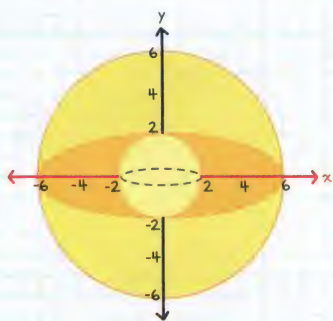
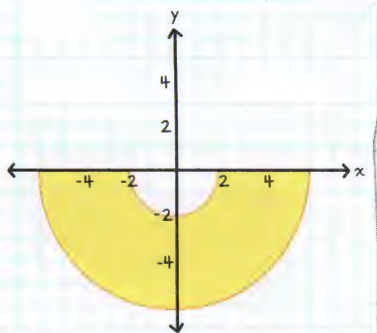
Diện tích toàn phần là:

$$\begin{aligned} S_{tp} &= \pi r^2 + \pi r l \\ &= \pi(4)^2 + \pi(4)(5) \\ &= 36\pi \end{aligned}$$

Diện tích toàn phần của hình nón là 36π đơn vị độ dài².

VÍ DỤ: Tìm thể tích của hình tạo thành khi quay hình được tô màu quanh trục hoành.

Hình khối tạo thành bởi mỗi hình bán nguyệt là một hình cầu. Phần giữa hai hình cầu (phần tô đậm) là thể tích ta cần tìm.



Thể tích phần tô đậm = thể tích hình cầu lớn - thể tích hình cầu nhỏ.

$$= \frac{4}{3} \pi r^3 - \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$= \frac{4}{3} \pi (6)^3 - \frac{4}{3} \pi (2)^3$$

$$= 277,3\pi$$

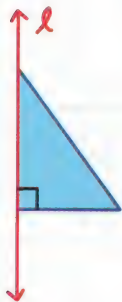
Thể tích của hình tô đậm là $277,3\pi$ đơn vị độ dài³.



BÀI TẬP

Với các câu từ 1-3, hãy gọi tên hình khối tạo thành khi quay hình tô đậm quanh đường thẳng l .

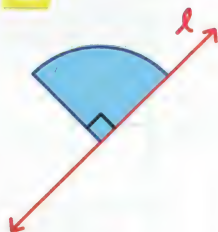
1.



2.

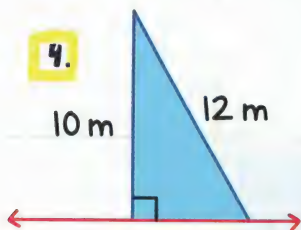


3.

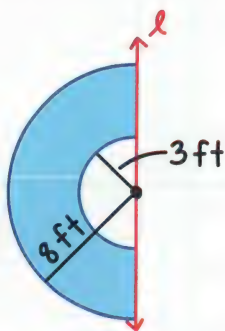


Với câu 4 và 5, hãy tìm thể tích của hình khối tạo thành khi quay hình tô đậm quanh đường thẳng l . Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất.

4.



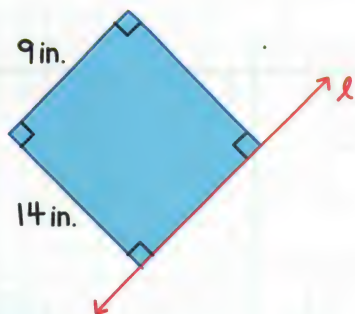
5.



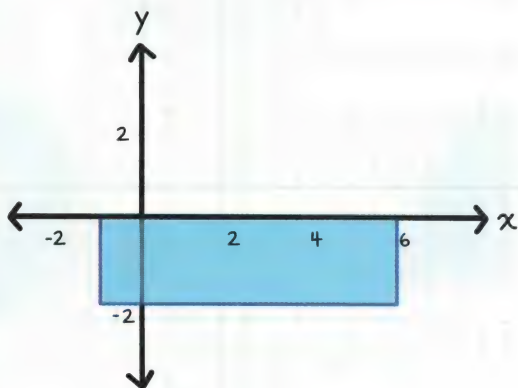


BÀI TẬP

6. Tìm diện tích toàn phần của hình khối tạo thành khi quay hình chữ nhật quanh đường thẳng l . Để nguyên kết quả chứa pi.



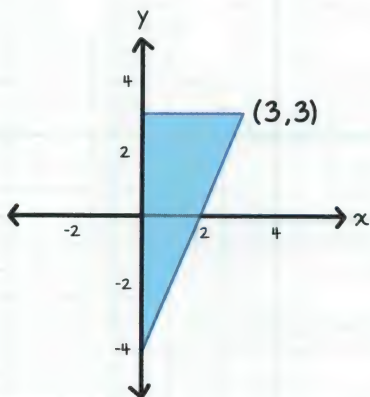
7. Tìm thể tích của hình khối tạo thành khi quay hình đã cho quanh trục hoành. Để nguyên kết quả chứa pi.



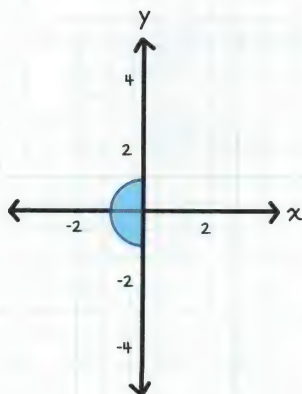
BÀI TẬP

Với câu 8 và 9, tìm thể tích của hình khối tạo thành khi quay hình tô đậm quanh trục tung. Để nguyên kết quả chứa pi.

8.



9.



LỜI GIẢI



1. Hình nón

2. Hình trụ

3. Hình bán cầu

4. $\frac{1}{3} \pi (10^2) \sqrt{44}$; $694,6 \text{ m}^3$

5. $\frac{4}{3} \pi (8^3) - \frac{4}{3} \pi (3^3)$; $2.031,6 \text{ ft}^3$

6. $2\pi(14^2) + 2\pi(14)(9)$; $644\pi \text{ in}^2$

7. $\pi(2^2)(7)$; 28π đơn vị độ dài³

8. $\frac{1}{3} \pi (3^2)(7)$; 21π đơn vị độ dài³

9. $\frac{4}{3} \pi (1^3)$; $\frac{4}{3} \pi$ đơn vị độ dài³

★ CHỈ MỤC ★

A

ánh, 230-232, 295

B

bán kính (r)
 định nghĩa, 419
 công thức, 420-422
 hình cầu, 579
 tiếp tuyến, 464
 bằng nhau góc - góc - cạnh (G.G.C), 157-158
 góc - cạnh - góc (G.C.G), 153-156
 những vấn đề cơ bản, 279-281
 định nghĩa, 139 tính chất, 70-71
 cạnh - góc - cạnh (C.G.C), 144-148
 cạnh - cạnh - cạnh (C.C.C), 142-143
 bất đẳng thức tam giác, 177-181
 biến đổi tương đương, 230
 bộ ba số Pytago, 359

C

các dây, 533
 các đỉnh, 532, 545
 cách đều, định nghĩa, 163
 cạnh, 124, 532
 cạnh đối
 định nghĩa, 400
 cạnh huyền
 định nghĩa, 400
 định lý Pytago, 355-356
 cạnh kề, định nghĩa, 400
 cạnh, so sánh, 177-181
 cạnh thẳng, 41
 cạnh tương ứng, 139, 310-311
 cạnh xen giữa, 153-154
 cắt tuyến, 471-474, 90-95

căn bậc hai, 357-358
 cặp góc, 27-40, 91-92, 99-105
 cặp góc tạo bởi hai cát tuyến, 91-92
 cắt trục tung, 349-352
 chia đôi tam giác
 đường cao, 171
 trọng tâm, 168-170
 tâm đường tròn ngoại tiếp, 165-167
 tâm đường tròn nội tiếp, 167-168
 trung tuyến, 168-170
 trục tâm, 171
 trung trực, 163-165
 điểm đồng quy, 172-173
 chia đôi đường cao, 171
 định lý phân giác của góc, 333-335
 phân giác của góc, 33-37
 trọng tâm, 168-170
 dây cung, 448, 451
 chu vi, 165-167
 dựng góc, 47-48
 tâm đường tròn nội tiếp, 167-168
 trung tuyến, 168-170
 trục tâm, 171
 trung trực, 35-37, 163-165, 172, 234-235
 các điểm đồng quy, 172-173
 đường phân giác, 12-13
 phân giác của tam giác, 163-174
 chia đôi đoạn thẳng, 12-13
 chiều cao, 340-343
 chiều cao dương, 343
 chiều dài dương, 343
 chiều dài âm, 343
 chớp, 545
 Chu vi (C) định nghĩa, 418
 công thức, 420-425

com-pa, 41
 chu vi, 504, 507
 chứng minh bằng đoạn văn, 77-79
 chứng minh bằng phương pháp tọa độ
 sử dụng công thức khoảng cách, 390-394
 sử dụng công thức hệ số góc, 388-389
 viết chứng minh, 386-387
 chứng minh các cặp góc đặc biệt, 99-105
 chứng minh đường thẳng song song, 109-113
 chứng minh hai cột, 72-75
 chứng minh hình học định nghĩa, 69
 chứng minh sơ đồ, 75-77
 chứng minh bằng đoạn văn, 77-79
 chứng minh hai cột, 72-75
 chứng minh tam giác, tọa độ.
 Tương tự xem chứng minh tam giác bằng phương pháp tọa độ
 chứng minh tọa độ tam giác
 sử dụng công thức khoảng cách, 374-377
 sử dụng định lý Pytago, 379-380
 sử dụng công thức hệ số góc, 377-378
 viết chứng minh, 373-374
 chứng minh tứ giác trên mặt

phẳng tọa độ, 386-394
tam giác trên mặt phẳng tọa độ, 373-380
định nghĩa, 8
hình học, 69-79 chứng minh tứ giác, tọa độ.
Xem chứng minh tứ giác bằng phương pháp tọa độ
công thức hệ số góc, 374, 377-378, 387-390
công thức trung điểm, 363-366, 373
công thức cosine, 412-414
công thức sine, 409-412
cosine (cos), 401-402
cosine, công thức, 412-414
công thức khoảng cách, 367-369, 373-377, 387, 390-391
công thức chiều dài cung, 436
cung cùng kẻ nhau, 433
cung bằng nhau, 435, 447 định nghĩa, 430
cung chắn, 455-456, 471
độ dài, 434-437
lớn, 432
độ đo, 431-434, 435-437
cung lớn, 432
cung nhỏ, 432

D

dạng chuẩn tắc, chuyển đổi, 481-484
dầu cân, 357
dầu gạch, 11
dầu phẩy ('), 23
dây cung bằng nhau, 447-448 định nghĩa, 418, 447
góc nội tiếp, 455

định lý, 447-451
diện tích toàn phần
kiến thức cơ bản, 532
hình tổng hợp, 591-593
hình nón, 551-553
hình trụ, 539-541
công thức, 589-590
hình bán cầu, 582-583
hình lăng trụ, 533-538
hình chóp, 545-550
khối tròn xoay, 602, 603
hình cầu, 580-583
diện tích xung quanh (DTXQ), 534-535, 540, 547, 551, 589-590
đa giác
độ đo góc, 219-225
diện tích, 499-507
định nghĩa, 120, 219
số đo góc ngoài, 223-225
số đo góc trong, 220-222
hình đa diện, 53
đều, 224-225, 504-507, 521, 545
đồng dạng, 311-315
loại, 219
Tương tự xem tứ giác, hình chữ nhật, hình vuông, tam giác
đa giác đều, 224-225, 504-507, 521, 545
đáy, 124
điểm mút, góc, 17
đường tròn lớn, 580
đường nằm ngang, 352
điểm
cộng tuyến, 5
đồng phẳng, 6
định nghĩa, 2
giao điểm, 7
điểm đồng quy
định nghĩa, 165
tổng hợp, 172-173
điểm đồng phẳng, 6
điểm tâm, 418 định lý tam giác cân, 124
điểm cộng tuyến, 5
đỉnh
góc, 17
định nghĩa, 3
định lý cạnh huyền, 158-159

định lý bất đẳng thức tam giác, 179
định lý đồng dạng cạnh - góc - cạnh (C.G.C), 322, 325
định lý góc trong cùng phía, 103-104, 105
định lý Pytago, 355-360, 379-380
định lý
đáy cung, 447-451
định lý góc so le ngoài, 102-103, 105
định lý góc so le trong, 101, 105, 156
định lý phân giác của góc, 333-335
định lý trọng tâm, 169-170
định lý chu vi, 166-167
định lý đảo của định lý góc so le ngoài, 109-110
định lý đảo của định lý góc so le trong, 109, 111-112
định lý đảo của định lý tam giác cân, 125
định lý đảo của định lý đường trung trực, 164
định lý đảo của định lý góc trong cùng phía, 109-110, 113
hệ quả của định lý tỷ lệ trong tam giác, 332-333
định nghĩa, 8
định lý cạnh huyền, 158-159
định lý tâm đường tròn nội tiếp, 167-168
định lý tam giác cân, 124
định lý đường trung trực, 163
định lý tổng các góc ngoài của đa giác, 223
chứng minh hình bình hành, 190-193
chứng minh hình thoi, 200-202
định lý Pytago, 355-360, 379-380, 478-480
định lý góc trong cùng phía, 103-104, 105
định lý đồng dạng cạnh - góc - cạnh (C.G.C), 322, 325
định lý đồng dạng cạnh - cạnh - cạnh (C.C.C), 324, 325

định lý tổng các góc trong tam giác, 130, 141
 định lý bất đẳng thức tam giác, 179
 định lý tỷ lệ thức tam giác, 329-331, 334-335
 định lý đường trung trực, 163
 định lý đảo, 58-62
 định lý đảo của định lý góc so le ngoài, 109-110
 định lý đảo của định lý góc so le trong, 109, 111-112
 định lý đảo của tiên đề góc đồng vị, 109-110
 định lý đảo của định lý tam giác cân, 125
 định lý đảo của định lý đường trung trực, 164...
 định lý đảo của định lý góc trong cùng phía, 109-110, 113
 định lý trọng tâm, 169-170
 định lý đường phân giác của góc, 333-334
 định lý góc so le trong, 101, 105, 156
 định lý tâm đường tròn nội tiếp, 167-168
 định lý tâm đường tròn ngoại tiếp, 166-167
 định lý tổng góc ngoài đa giác, 223
 định lý tổng các góc trong tam giác, 129
 định lý tỷ lệ thức trong tam giác, 329-331, 334-335
 đoạn thẳng
 chia đôi, 12-13
 bằng nhau, 10-12
 định nghĩa, 3
 đoạn thẳng bằng nhau, 10-12
 đoạn tiếp tuyến bằng nhau, 464
 độ, 18-19
 độ và radian, chuyển đổi, 444
 đổi từ độ sang radian, 444
 đồng quy, định nghĩa, 165
 độ đo góc ngoài, 223-225
 đối xứng trục, tương ứng, 232
 đối xứng trục

tích các phép đối xứng trục, 271-273
 trên mặt phẳng tọa độ, 233-239
 trượt, 269-270
 tính chất, 270
 phép dời hình, 230-232
 hình đối xứng, 274
 đơn vị khối, 557
 đơn vị vuông, 490
 dựng hình
 phân giác của góc, 47-48
 góc, 46-47
 đường cao, 171, 173
 đường kính (d)
 chia đôi dây cung, 448, 451
 định nghĩa, 419
 công thức, 420-422
 hình cầu, 579
 đường sinh, 546
 đường thẳng
 trên mặt phẳng tọa độ, 349-352
 định nghĩa, 2, 5
 tìm hệ số góc, 344-349
 giao điểm, 7
 tên gọi, 5
 song song, 4, 44-45, 88-90, 99-105, 109-113, 271-273
 vuông góc, 4, 35, 42-43, 347
 cắt tuyến, 471-474
 hệ số góc, 347
 tiếp tuyến, 463-464
 thẳng đứng và nằm ngang, 352
 đường thẳng chéo nhau, 89
 đường thẳng song song, 44-45
 kiến thức cơ bản, 88-90
 dựng hình, 44-45
 định nghĩa, 4
 chứng minh, 109-113
 đối xứng trục, 271-273
 hệ số góc, 347
 cặp góc đặc biệt, 99-105
 đường thẳng vuông góc
 dựng hình, 42-43
 định nghĩa, 4, 35
 hệ số góc, 347
 đường thẳng đứng, 352

đường thẳng $y = x$ trong phép đối xứng trục, 238-239
 đường tròn
 cung và dây cung, 447-451 diện tích, 511-515, 521
 góc ở tâm và cung, 430-437
 chu vi (C), 420-425
 đồng tâm, 422-423
 bằng nhau, 435
 đường tròn đồng tâm, 422-423
 đường trung bình, 210

G

giá thiết, 56-57
 giá trị tuyệt đối, 367
 góc nhọn, 19
 góc kẻ, 20, 27
 góc so le ngoài, 91
 góc so le trong, 91
 góc quay, 251-252, 256-259
 góc nhọn, 19
 góc kẻ, 20, 27
 góc ở đáy, 124
 góc cơ bản, 19 góc ở tâm, 430, 434, 435-437
 phân loại tam giác, 121-122
 so sánh, 177-181
 góc phụ nhau, 29, 31-32
 tương đồng, 139-148
 góc bằng nhau, 22-23, 28, 33-34
 dựng hình, 46-47
 Tương ứng, 92, 139, 310-311
 định nghĩa, 3, 17
 góc ngoài, 90, 129-135
 miền ngoài, 18
 góc xen giữa, 144 góc nội tiếp, 455-459
 góc trong, 90, 123-125, 129-131, 129-135, 220-222
 miền trong, 18
 độ đo, 18-19, 442
 độ đo trong đa giác, 219-225 tên gọi, 17-18
 góc không kẻ, 20 góc tù, 19
 chứng minh cặp góc đặc biệt, 99-105 góc vuông,

19 góc trong cùng phía, 91,
103-104, 105 góc bet, 20
góc bù nhau, 30-31 cặp
góc tạo bởi một đường
thẳng cắt hai đường thẳng
song song, 91-92 phân
loại, 19-20
đối, 27
góc đối đỉnh, 27-28 góc ở
đầu, 124
góc ở tâm, 430-434, 435-437
góc phụ nhau, 29, 31-32 góc
bằng nhau, 22-23, 28,
33-34
giả định, 53-55
góc đồng vị, 92, 139, 310-311
góc ngoài, 90, 132-135
góc nội tiếp, 455-459
góc xen giữa, 144
góc trong, 90, 129-131
giao điểm của đường thẳng
và mặt phẳng, 7
góc kề bù
định nghĩa, 30
sử dụng ví dụ suy luận quy
nạp, 55
góc không kề, 20
góc tù, 19
góc vuông, 19
góc trong cùng phía, 91
góc bet, 20
góc bù nhau, 30-31
góc đối đỉnh, 27

H

hai hay nhiều cát tuyến,
93-95
hàm lượng giác ngược, 411
hàm lượng giác, 401-402
hàng số, định nghĩa, 350
hệ quả, định nghĩa, 332
hệ quả của định lý tỷ lệ
trong tam giác, 332-333
hệ số góc không xác định,
342
hệ số góc bằng không,
342 hình đa diện, 532
hệ số góc âm, 342
hệ số góc, 340-349

hệ số góc dương, 342
hình
nội tiếp, 458-459
một chiều, 5
hai chiều, 6
hình ba chiều (3D), 532
hình bán cầu
định nghĩa, 580
diện tích toàn phần, 582-
583
thể tích, 585, 590
hình bán nguyệt, 431
hình bảy cạnh
diện tích, 504
số cạnh, 219
hình bình hành
diện tích, 490-493, 520
định nghĩa, 187, 215
tính chất, 188-189
định lý để chứng minh,
190-193
Tương tự xem tứ giác, hình
chữ nhật, hình thoi, hình
vuông
hình cầu
định nghĩa, 579
diện tích toàn phần, 580-
583
thể tích, 583-585, 590
hình chóp
định nghĩa, 545
chiều cao, 546
đều, 545, 547-550
diện tích toàn phần, 545-
550
loại, 546
thể tích, 569-571, 590
hình chữ nhật
diện tích, 490-491, 520
kiến thức cơ bản, 202-204
định nghĩa, 187, 215
hình cụt, thể tích, 574-575
hình elip
diện tích, 502-503, 521
định nghĩa, 214, 215
hình đối xứng, 274
hình đồng dạng, 310-315
hình ép phẳng, 534
hình hai chiều, 6
hình học

định nghĩa, 2
khái niệm chính, 2-4
hình lăng trụ chữ nhật, 533,
536-537, 558-560
hình lăng trụ xiên, 563
hình lục giác
diện tích, 505, 507
số cạnh, 219
hình mười cạnh, số cạnh, 219
hình nón định nghĩa, 551
diện tích toàn phần, 551-
553 thể tích, 572-574, 589
hình nội tiếp, 458-459
hình thang cân, 212-213, 215
hình tám cạnh, số cạnh, 219
hình một chiều, 5
hường ngược, 232
hình ngũ giác, số cạnh, 219
hình gốc, 230-232, 295
hình lăng trụ
định nghĩa, 533
xiên, 563-565
chữ nhật, 533, 536-537,
558-560
diện tích toàn phần, 533-
538
tam giác, 533, 538, 561-562
loại, 533
thể tích, 558-562, 590
hình chóp đều, 545, 547-550
hình thoi
diện tích, 502-503, 521
kiến thức cơ bản, 197-199
định nghĩa, 187-215
định lý để chứng minh,
200-202
hình có tâm đối xứng, 275
hình quạt, 430, 514-515, 521
hình khối, 532
hình khối tròn xoay
trên mặt phẳng tọa độ,
602-604
định nghĩa, 599-604
diện tích toàn phần, 602-
603
thể tích, 600-601, 604
hình không gian, 532
hình tổng hợp ba chiều (3D),
589
hình thang
diện tích, 499-501, 520

kiến thức cơ bản, 209-211
định nghĩa, 187, 215
cân, 212-213, 215

hình tổng hợp,
diện tích, 519-527
thể tích, 589-596

hình trụ
xiên, 563-565
diện tích toàn phần, 539-541
thể tích, 562-565, 590
hình trụ xiên, 563
hình vuông
kiến thức cơ bản, 204-205
định nghĩa, 187, 215
quay, 254

K

kết luận, 56-57
khoảng không góc ngoài, 18
khoảng không góc trong, 18
khối vuông, 7

L

lăng trụ tam giác, 533, 538,
561-562
logic và suy luận, 53-68
lượng giác, định nghĩa, 400

M

mặt bên, 533
mặt phẳng
định nghĩa, 6
cắt nhau, 7
tên gọi, 6
song song, 89
mặt phẳng song song, 89
mặt phẳng tọa độ
đường tròn, 477-481
phép đồng dạng, 302-304
khoảng cách, 368-369
trung điểm, 364-366
phép đối xứng trục, 233-
239
hình tròn xoay, 602-604
giải bài toán, 147-148

phép tịnh tiến, 244-247
mệnh đề tương đương, 11, 60-
62, 65 mệnh đề kéo theo,
56-60, 65
mệnh đề nếu - thì, 56-62

N

ngược đảo âm, 347, 371-378
nguyên lý Cavalieri, 564-565

O

oblique cylinders, 563
oblique prisms, 563
observations, 53-55
obtuse angle, 19
obtuse triangle, 121, 360
octagon, number of sides
in, 219
one-dimensional shapes, 5
opposite leg, definition of,
400
opposite orientations, 232
orthocenter, 171, 173

P

phân giác của góc, 33-37, 172
phân số bằng nhau, 289
phân bù bình phương, 481-
484 phân ví dụ, 54-55
phân tách, công thức, 62-
63, 65
phép đồng dạng
trên mặt phẳng tọa độ,
302-304
định nghĩa, 295
vẽ hình, 300-301
tìm tỷ số đồng dạng, 297-
299
tỷ số đồng dạng, 296
phép đối xứng trượt, 269-270
phép dời hình
kiến thức cơ bản, 230-232
bằng nhau, 279-281
tính chất, 270
Tương tự xem phép đối
xứng trục, phép quay; phép

tịnh tiến
phép quay, tâm, 251-252,
260-261, 275
phép biến hình
tích các phép biến hình,
265-266
phép đồng dạng, 295-304
loại phép dời hình, 230
phép quay
kiến thức cơ bản, 251-252
trên mặt phẳng tọa độ,
257-259
dựng hình, 253-255
tìm góc, 256-257
tìm tâm, 260-261
tính chất, 270
hình đối xứng, 275
cách dời hình, 230
phép tịnh tiến
kiến thức cơ bản, 243-247
tích các phép tịnh tiến,
267-268
tính chất, 270
loại phép dời hình, 230
phóng to, 295-296
phương trình đường thẳng,
349-351
phương trình tuyến tính, đồ
thị, 349-351
pi (...), 419-420

Q

quan sát, 53-55
quy tắc tam đoạn luận, 62,
64, 65
quy tắc phân tách, 62-63, 65
quy tắc suy luận diễn dịch,
62-65

R

Radian, 442-444

S

sine (sin), 401-402
sine, công thức, 409-412
số chính phương, 357

số đo góc nội tiếp, 220-222
số nghịch đảo, 347, 377-378
suy luận diễn dịch, 62-65
suy luận quy nạp, 53-62, 65
số vô tỷ, 357

T

tam giác
tam giác nhọn, 121, 359-360
độ đo góc trong đa giác,
220-222
diện tích, 493-495, 520
phân loại, 121-125
bằng nhau, 139-148
tổng hợp các trường hợp
bằng nhau, 159-160
định nghĩa, 4, 120
tam giác đẳng giác, 122
tam giác đều, 121, 506
tam giác cân, 121, 124-125,
374-376
tên gọi, 120
cạnh, 219
tam giác tù, 121, 359-360
tỷ lệ thức, 329-355
tam giác vuông, 122, 158,
355-356, 359-360, 377-380,
400-405
tam giác thường, 121, 376-
377
đồng dạng, 319-326
vuông đặc biệt, 403-405
các loại tam giác, 120-125
tam giác vuông đặc biệt,
403-405
tam giác đồng dạng, 319-
326
tam giác tù, 121, 360
tam giác cân, 121, 124-125,
374-376
tam giác nhọn, 121, 359 - 360
tâm đường tròn nội tiếp,
167-168, 172
tính chất cộng - trừ của
đẳng thức, 70 tiên đề đồng
dạng góc - góc (G.G), 319-
322, 325
tiên đề đoạn thẳng, 8-10

tiên đề cộng, 433-434
trục, 599
trọng tâm, 168-170, 172
trọng lực, 170
tâm của phép quay, 251-252,
260-261, 275
tâm đường tròn ngoại tiếp,
165-167, 172. tiếp tuyến
chung, 463-464 tích các
phép biến hình đối xứng
trượt, 269-270 tích các
phép đối xứng, 271-273
hình đối xứng, 274-275
tích các phép tịnh tiến,
267-268
tiên đề góc đồng vị, 99, 105
tích chéo, 289-291
tính chất bắc cầu của quan
hệ bằng nhau, 71-74
tính chất bắc cầu của đẳng
thức, 71
tính chất của đẳng thức và
quan hệ bằng nhau, 69-71
tính chất phân phối, 71
tính chất chia của đẳng
thức, 70
tính chất đẳng thức, 69-71
tam giác đẳng giác, 122
tam giác đều, 121, 506
tỷ số mở rộng, 288
trục đối xứng cắt nhau,
271-273
tam giác vuông cân, 403
trục đối xứng, 232-239,
271-273
trục đối xứng của hình, 274
tương ứng trong đối xứng
trục, 232
trung tuyến, 168-170, 172
trung điểm, 12
tính chất nhân của đẳng
thức, 70
trục số
khoảng cách, 367
trung điểm, 363-364
trục tâm, 171, 173
trung trục, 35-37, 163-165,
172, 234-235
tiếp điểm, 463
tiên đề
tiên đề cộng góc, 21-22, 34

tiên đề đồng dạng góc -
góc (G.G), 319-322, 325
tiên đề bằng nhau góc -
góc - cạnh (G.G.C), 157-158
tiên đề bằng nhau góc -
cạnh - góc (G.C.G), 155-156
tiên đề cộng, 433-434
định lý đảo của tiên đề góc
đồng vị, 109-110
tiên đề góc đồng vị, 99, 105
định nghĩa, 8
tiên đề đoạn thẳng, 8-10
tiên đề cộng đoạn thẳng,
8-10
tiên đề bằng nhau cạnh -
góc - cạnh (C.G.C), 148
tiên đề bằng nhau cạnh -
cạnh - cạnh (C.C.C), 142
tỷ lệ thức
kiến thức cơ bản, 289-292
tìm diện tích của hình tròn,
514-515
trong tam giác, 329-335
tứ giác
thường dùng, 187
định nghĩa, 186
nội tiếp, 458-459
số cạnh, 219
loại, 215
Tương tự xem hình điều,
hình chữ nhật, hình thoi,
hình vuông, hình thang
phương trình tứ giác, 481-484
tỷ số, 286-288
tỷ số, lượng giác, 400-405
tia, định nghĩa, 3
tia, góc, 17
thu nhỏ, 295-296
tính chất phản xạ của quan
hệ bằng nhau, 156
tính chất phản xạ của đẳng
thức - quan hệ bằng nhau,
70
tròn xoay, hình khối Xem khối
tròn xoay
tam giác vuông
phân loại tam giác, 122
định lý cạnh huyền, 158
định lý Pytago, 355-356,
379-380
quy tắc, 359-360

công thức hệ số góc, 377-378
trường hợp đặc biệt, 403-405
khái niệm, 400
hàm lượng giác, 401-402
tỷ số đồng dạng, 296-299, 312-313

tam giác thường, 121, 376-377
tiên đề cộng đoạn thẳng, 8-10
trường hợp bằng nhau cạnh - góc - cạnh (C.G.C), 144-148, 159
trường hợp bằng nhau cạnh - cạnh - cạnh (C.C.C), 142-143, 159
trường hợp đồng dạng cạnh - cạnh - cạnh (C.C.C), 324-325

tỷ số lượng giác, 400-405

thể tích

kiến thức cơ bản, 557
hình tổng hợp, 593-596
hình nón, 572-574, 589
hình trụ, 562-565, 590
công thức, 589-590
hình cụt, 574-575
hình bán cầu, 585-590
hình lăng trụ, 558-562, 590
hình chóp, 569-571, 590
khối tròn xoay, 600-601, 604
hình cầu, 583-585, 590

tam đoạn luận, quy tắc, 62, 64, 65

tính chất đối xứng của quan hệ bằng nhau, 71

tính chất đối xứng của đẳng thức, 71

tính chất trừ của đẳng thức, 71

tiếp tuyến, điểm, 463

tiên đề cộng góc, 21-22, 34

tangent (tan), 401-402, 463-467

tiếp tuyến, cát tuyến, 474

tê-ta, ..., định nghĩa, 400

trên mặt phẳng tọa độ, 477-481
định nghĩa, 418

phương trình, 477-484

kiến thức cơ bản, 418-425

góc nội tiếp, 455-459

thành phần, 418-419

độ đo radian, 442-444

cát tuyến, 471-474

hình bán nguyệt, 431 tiếp tuyến, 463-467

trường hợp bằng nhau góc - góc - cạnh (G.G.C), 157-158-159

trường hợp bằng nhau góc - cạnh - góc (G.C.G), 153-156, 159
trung đoạn, 504-506
trục hoành trong phép đối xứng trục, 238-239
trục tung trong phép đối xứng trục, 238-239



vẽ phép quay, 253-255
véc-tơ tịnh tiến, 244-247

SỞ TÂY HÌNH HỌC

NHÀ XUẤT BẢN LAO ĐỘNG

175 Giảng Võ - Ba Đình - Hà Nội

Điện thoại: 024 38515380 Fax: 024 38515381

Email: info@nxblaodong.com.vn

Website: www.nxblaodong.com.vn

Chi nhánh phía Nam:

Số 85 Cách Mạng Tháng Tám, Quận 1, Thành phố Hồ Chí Minh

Điện thoại: 02838390970 Fax: 02839257205

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc - Tổng biên tập

MAI THỊ THANH HẰNG

Biên tập NXB: Lê Thị Hằng

Sửa bản in: Á Châu Book

Bìa: Á Châu Book

Trình bày: Hoài Hương

Liên kết xuất bản và phát hành

Công ty Cổ phần Đầu tư và Phát triển Giáo dục Quốc tế Á Châu

Số 8 Lô 2, Dự án nhà ở Phùng Khoang, Phường Trung Văn,

Quận Nam Từ Liêm, Hà Nội

Điện thoại: 024 8582 5555 Hotline: 09166 40 166

Website: <http://achaubooks.vn> Hoặc <http://hocgioitoan.com.vn>

Email: info@achaubooks.vn

Facebook: fb.com/hocgioitoan.com.vn

In 2.000 cuốn, khổ 14x20.5 cm, tại Công ty cổ phần In Sao Việt,
địa chỉ: số 9/40 phố Ngụy Như Kon Tum, phường Nhân Chính,
quận Thanh Xuân, TP Hà Nội.

Số xác nhận ĐKXB: 5506-2020/CXBIPH/08-266/LĐ. Số QĐXB của NXB:

1986/QĐ-NXBLĐ ngày 31/12/2020

Mã số sách tiêu chuẩn quốc tế (ISBN): 978-604-320-358-5

In xong và nộp lưu chiểu năm 2021.